koala@vlo.poznan.pl

Konkurs matematyczno-informatyczny KOALA

V edycja konkursu

Zadania pierwszego etapu

Organizatorem konkursu jest V Liceum Ogólnokształcące im. Klaudyny Potockiej w Poznaniu.
Wsparcie merytoryczne i organizacyjne: Wydział Matematyki i Informatyki UAM i Instytut Informatyki PP.

Instrukcja
1. Prosimy zapoznać się z regulaminem konkursu, dostępnym na stronie http://koala.vlo.poznan.pl/
2. Rozwiązania wszystkich zadań należy zapisywać w języku polskim.
3. Odpowiedzi do zadań każdej serii prosimy przesyłać w podanym terminie poprzez stronę internetową.

Powodzenia!

I seria zadań

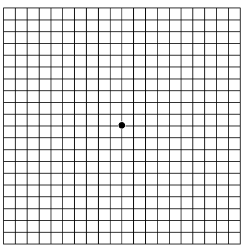
do 11 stycznia 2018

1. Twins camp

A couple of twins, Jacek and Placek, went for a camp with four other couples of twins. Before the camp people did not know each other (except of their twin of course) but during the camp some people became friends. At the end of the camp Jacek asked the other (nine) people present how many new friends they have among people met at the camp and all gave a different answer. Everybody was correct. How many new friends did Placek get?

2. Leniwy biegacz

Alejki w parku tworzą kratę 21 x 21 skrzyżowań.



Biegacz stoi na środkowym skrzyżowaniu kraty. Biegacza obserwuje cały czas jego trener, któremu zależy, by biegacz biegał jak najdłużej. Natomiast biegacz chciałby skończyć trening, przebiegając jak najkrótszą trasę.

Biegacz umówił się z trenerem na następujące zasady treningu: Na każdym skrzyżowaniu może skręcić w prawo, lewo, lub biec prosto, ale nie może się cofać. Jeśli dobiegnie do pólnocnej lub południowej krawędzi kraty, przestaje biegać. Biegacz ma słuchawki na uszach, przez które słyszy trenera. Trener może pięć razy, w wybranych przez siebie momentach, gdy biegacz dobiegnie do jakiegoś skrzyżowania, wydać komendę „na tym skrzyżowaniu skręć w lewo”, lub „na tym skrzyżowaniu skręć w prawo”, lub „na tym skrzyżowaniu biegnij prosto”. Biegacz musi wykonać polecenie.

Do pokonania jakiej najdłuższej drogi może zmusić leniwego biegacza trener? Długość drogi mierzymy w odcinkach od skrzyżowania do skrzyżowania.

3. Gra z różnicami

Nauczyciel wybrał liczbę 77, a uczniowie liczbę 14. Następnie zapisano je na tablicy: 77, 14.

Nauczyciel zaproponował swoim dziesięcioletnim podopiecznym następującą grę: „Na zmianę, raz ja, a raz ktoś z was, będziemy po przecinku dopisywać jedną liczbę naturalną. Żadna z napisanych liczb nie może się powtórzyć a, co najważniejsze, musi być różnicą pewnych dwóch liczb zapisanych wcześniej. Wygrywa ten, kto jako ostatni napisze liczbę na tablicy.”

Kto wygra? Ile liczb pojawi się na tablicy?

4. Cukierki

W słoiku znajdują się cytrynowe, truskawkowe i czekoladowe cukierki, po tyle samo w każdym smaku.

Okazuje się, że najmniejsza liczba cukierków, jakie wystarczy losowo wyciagnac, aby mieć pewność, że wśród nich są dwa cukierki o tym samym smaku, jest równa najmniejszej liczbie cukierków, jakie wystarczy losowo wyciągnąć, by mieć pewność, że wśród nich są dwa cukierki w różnych smakach.

Ile cukierków jest w słoiku?

5. Winda

W sześciopiętrowym bloku (posiadającym również parter) kursuje winda. Przychodzimy na drugie piętro i wciskamy guzik wzywający windę. Załóżmy, że wtedy winda z jednakowym prawdopodobieństwem stoi na jednym z siedmiu poziomów.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że winda przyjedzie z góry?

II seria zadań

do 18 stycznia 2018

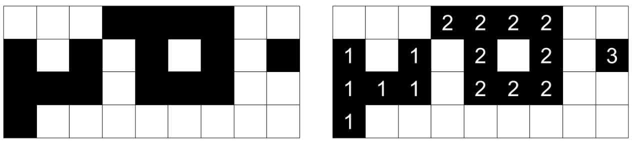
6. Segmentation

Labeling of a binary image (a digital image that has only two possible values for each pixel) is the operation that assigns a unique value to pixels belonging to the same connected region.

Pixel connectivity is defined in terms of pixel neighbourhoods. The von Neumann pixel neighborhood contains only four adjacent pixels: one pixel above, one below, one to the left and one to the right of the analyzed pixel.

One of the simplest and most common algorithms for labelling connected regions (segmentation) in a binary image exploits the "grassfire"principle: after a "fireśtarts at one pixel, it propagates to any of the pixel's neighbours detected by thresholding. Each already visited (i.e. "burnt away") pixel cannot be visited again and after the entire connected region is labelled, its pixels are assigned a region number and the procedure continues to search for the next connected region.

Here's an example:



Such a method helps to count the connected components of an image. For example in medicine labeling is a pre-process operation for individual cell analysis of a muscle tissue.

Shown below is a small binary image (zoomed).

How many connected regions are there on the image, when the Von Neumann neighborhood is considered? Omit the white background.

7. Najlepszy wybór

W każdej z czterech kopert znajduje się jeden banknot. Nie wiesz, jakie to banknoty, ale wiesz, że każdy banknot ma inną wartość i że koperty z banknotami będą wręczane w losowej kolejności.

Otwierasz pierwszą podaną ci kopertę i sprawdzasz, co w niej jest. Otwierasz następne podawane koperty i mówisz „Koniec zabawy, biorę ten banknot!", gdy zobaczysz kwotę większą od tej z pierwszej koperty. Wybrany w ten sposób banknot staje się twoją własnością. Może się oczywiście zdarzyć, że nic nie dostaniesz (gdy wszystkie trzy kwoty okażą się mniejsze od pierwszej).

Oblicz prawdopodobieństwo, że staniesz się posiadaczem banknotu o największej wartości.

8. Stabilny fragment ciągu

Fragment ciągu binarnego nazywamy stabilnym, gdy składa się z kolejnych cyfr wyjściowego ciągu i ma tyle samo zer co jedynek.

Przykład
W ciągu 010001010110000110 istnieje m.in. stabilny fragment 1010 długości 4, ale też 101011000011 długości 12. Podciągu 10100011 nie możemy nazwać fragmentem ciągu wyjściowego, bo nie składa się z kolejnych wyrazów ciągu.

Dany jest ciąg binarny:

11000101101011101111001100101001101110 11

Ile cyfr ma najdłuższy stabilny fragment tego ciągu?

9. Przychodnia

Pięciu pacjentów przyszło pewnego dnia do przychodni lekarskiej ale w różnych porach, co pół godziny między 9:30 a 11:30. Każdy był z wizytą u innego specjalisty, w tym jeden u internisty.

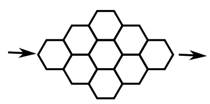
Wiadomo, że:

- Artur przyszedł wcześniej niż Stefan, ale nie do neurologa.
- Pacjent okulisty nie zjawił się jako pierwszy ani jako ostatni.
- Bogdan był przed Stefanem, który z kolei wyprzedził pacjenta laryngologa.
- Grzegorz dotarł do przychodni pół godziny po pacjencie kardiologa, ale nie jako ostatni.
- Imię pacjenta laryngologa, którym nie był Jerzy, zaczyna się literą dalszą w alfabecie niż pierwsza litera pacjenta neurologa.

Kto i o której godzinie był u internisty?

10. Przechadzka

Alejki w parku tworzą wzorek, złożony z 9 sześciokątów.



Wyruszasz z lewego końca parku i przechadzasz się alejkami, nie powtarzając żadnej z nich, cały czas oddalając się od punktu startu, po czym wychodzisz bramą znajdującą się w prawym końcu parku.

Iloma różnymi trasami możesz się przechadzać?

III seria zadań

do 25 stycznia 2018

11. Balls in bins

You have 8 bins. Every bin contains either 60 lighter or 60 heavier balls. Let us call the bins with lighter balls bad. There are exactly 3 bad bins but you do not know which are bad (you know only that there are three of them). All balls look identical but every lighter ball is lighter by 10 g than every heavier ball.

You have also a big electronic weighing scale, which can show you the weight of any number of balls (even 500 balls!) with the precision of 1 g.

Is it possible to use the scale only once and determine which bins are bad? If so, how many balls and from which bins would you take and put on the scale?

12. Gdzie mieszka Tosia?

Bolek, Lolek i Tosia mieszkają na tej samej ulicy, ale każde pod innym numerem. Domów na ulicy jest 99, ponumerowanych liczbami od 1 do 99. Nasi bohaterowie dopiero się wprowadzili i nie zdążyli dowiedzieć się, kto mieszka w innych domach. Ani Bolek, ani Lolek nie znają numeru domu Tosi, ale postanowili ją odwiedzić. Bolek, w tajemnicy przed Lolkiem, zadał Tosi takie dwa pytania:

– Czy twój numer jest kwadratem liczby naturalnej?

– Czy twój numer jest większy od 50?

Tosia odpowiedziała na oba pytania (wiemy, że Tosia odpowiada na pytania tylko „tak” lub „nie”).

Bolek, pewien, że wie, gdzie mieszka Tosia, poszedł ją odwiedzić. Niestety okazało się, że pod wybranym przez niego numerem Tosia nie mieszka. Nic dziwnego, bo Tosia tylko na drugie pytanie odpowiedziała zgodnie z prawdą.

Nastepnego dnia Lolek, w tajemnicy przed Bolkiem, zadał Tosi takie dwa pytania:

– Czy twój numer jest sześcianem liczby naturalnej?

– Czy twój numer jest większy od 25?

Tosia odpowiedziała na oba pytania.

Lolek, pewien, że wie, gdzie mieszka Tosia, poszedł ją odwiedzić. Niestety i jemu nie udało się dobrze trafić. Nic dziwnego, Tosia ponownie tylko na drugie pytanie odpowiedziała zgodnie z prawdą.

A teraz zdradzimy wam pewien sekret: numer domu Tosi jest najmniejszy spośród numerów domów trzech bohaterów tego zadania, a w dodatku suma numerów ich domów jest podwojonym kwadratem liczby naturalnej.

Pod jakim numerem mieszka Tosia?

13. Sieć komputerowa

Mamy 4 serwery i 6 komputerów. Chcemy stworzyć bezpośrednie połączenia między komputerami a serwerami tak, by każda grupa 4 komputerów miała bezpośredni dostęp do 4 różnych serwerów (chodzi o to, by każdy komputer z tej czwórki mógł korzystać z innego serwera).

Jaka jest najmniejsza liczba połączeń bezpośrednich, dzięki której możemy osiągnąć nasz cel?

14. Suma w trójkącie

Rysunek przedstawia trójkąt zbudowany z liczb dwucyfrowych.

95
91 92
91 91 90
92 91 91 91
92 92 92 92 94
90 94 92 92 94 91
93 92 94 92 92 92 92
92 91 90 91 92 91 94 91
92 91 94 91 92 91 94 91 92
92 91 93 91 92 91 90 91 92 92

Wyznacz największą sumę liczb, którą możesz uzyskać, dodając napotkane liczby, poruszając się zgodnie ze strzałkami, zaczynając od wierzchołka (z liczbą 95), aż do najniższego rzędu liczb. Początkową liczbę 95 też należy do sumy doliczyć.

15. Raz i dwa

Koty Filemon i Bonifacy grają na takiej planszy:

2	2	1	1	2	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2	1	2	2	2	1	

Na początku Filemon stawia myszkę na jednym z czterech pierwszych pól. Następnie Bonifacy i Filemon na zmianę przesuwają myszkę: jeśli stoi ona na polu z jedynką, to zawodnik musi przesunąć myszkę o jedno pole w prawo. Jeśli stoi na polu z dwójką, to zawodnik ma wybór: albo przesuwa ją o jedno, albo o dwa pola w prawo. Przegrywa ten, kto pierwszy postawi mysz na pustym polu końcowym.

Zakładamy, że obaj zawodnicy grają doskonale i nie popełniają błędów.

Postawienie myszy na których z pierwszych czterech pól gwarantuje wygraną Filemonowi?