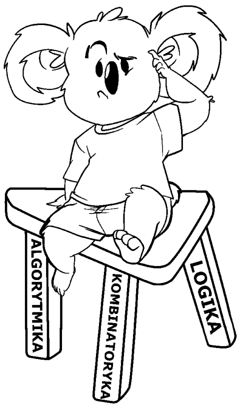
80 LAT V LO
SZKOŁY PRAWDZIWIE WIELKOPOLSKIEJ

KONKURS MATEMATYCZNO-INFORMATYCZNY
ORGANIZOWANY PRZEZ
V LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCE
IM. KLAUDYNY POTOCKIEJ W POZNANIU

IV EDYCJA KONKURSU

ZADANIA PIERWSZEGO ETAPU



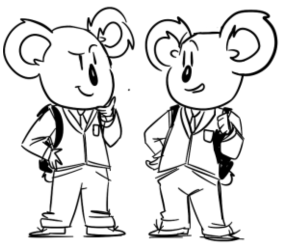
Instrukcja

1. Prosimy **zapoznać się z regulaminem** konkursu, dostępnym na stronie http://koala.vlo.poznan.pl/
2. Rozwiązania wszystkich zadań prosimy zapisać **w języku polskim**.
3. Rozwiązanie każdego zadania (z **uzasadnieniem**) należy zapisać na oddzielnej kartce, opisanej nazwą drużyny.
4. Odpowiedzi do zadań każdej serii należy **przesyłać w terminie**, używając formularza ze strony www.
5. Wszystkie kartki z rozwiązaniami prosimy **umieścić w kopercie** i przekazać szkolnemu Opiekunowi konkursu.

Powodzenia!

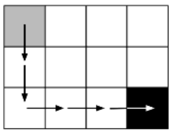
I seria (do 11 listopada 2016)

1. Twins' schools

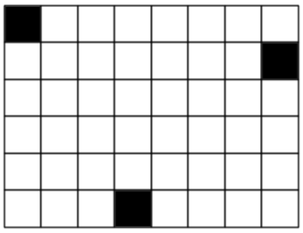


The Arnold family is moving to New York and have to decide where to rent. One factor is the proximity to schools. Their twins insist on attending different schools, and refuse to walk more than 4 blocks to school.

Assume that the distance they have to walk is the distance NS (north—south) + the distance EW (east—west), so that in the example an apartment in the lightly shaded block is 5 blocks from the school (dark shading).



In the area that they intend renting, there are 3 suitable schools.



How many blocks are there within 4 blocks of at least two of the schools?

2. Wyszukiwarka

W Twoim katalogu są pliki, w których nazwach występują wyłącznie małe litery łacińskiego alfabetu, który liczy 26 liter. Masz program, który potrafi wyszukać pliki według wzorca. Na przykład wzorcowi `k?a*l??` odpowiadają nazwy `koalom` lub `kqavuliu`, ale nie `koala`.

Każdemu znakowi `?` odpowiada jedna litera, a znakowi `*` – dowolny ciąg liter, być może pustych.

W Twoim katalogu żadna nazwa pliku nie ma więcej niż 10 liter. Wydałeś polecenie znalezienia wszystkich plików w katalogu, które odpowiadają wzorcowi `?b?k*`. Jaka jest największa możliwa liczba plików, które wyszukiwarka znajdzie w Twoim katalogu?
Odpowiedź podaj w postaci jednej liczby.

3. Waga

Dwa tocosie i jeden bamboś ważą tyle, ile dwa ambosie i trzy cambosie. Sześć bambosi waży tyle, ile jeden tocoś, jeden amboś i jeden camboś. Jeden tocoś i jeden amboś ważą tyle, ile dwa bambosie i jeden camboś.

Ile ważą poszczególne przedmioty, jeżeli waga każdego z nich (w kilogramach) jest liczbą całkowitą, najmniejszą z możliwych?

Odpowiedzi podaj w kolejności odpowiadającej porządkowi alfabetycznemu nazw przedmiotów.

4. Cukierki

Pinokio ma 18 cukierków, w tym: krówki (K), landrynki (L) i mordoklejki (M). Pinokio postanowił rozdzielić wszystkie na kilka paczek dla swoich przyjaciół i zrobić to w taki sposób, by w każdej paczce był co najmniej jeden cukierek, a każda paczka była inna. Oznacza to, że nie mogą powstać dwie paczki, w których liczby krówek byłyby takie same, a jednocześnie takie same liczby landrynek i takie same liczby mordoklejek. Na przykład paczka KLL jest inna niż MMLL, ale taka sama jak LKL.

Nie znamy dokładnego składu zbioru cukierków Pinokia, wiemy tylko, że jest ich dokładnie 18, a rodzaje cukierków są dokładnie trzy.

Jaka jest największa liczba n, co do której możemy być pewni, że (niezależnie od dokładnego składu) Pinokio może rozdzielić cukierki na n paczek?

Przykład: Gdyby Pinokio miał 7 cukierków, to możemy być pewni, że może utworzyć dwie różne paczki (w jednej krówka, w drugiej reszta cukierków), ale nie możemy być pewni, że możliwe jest utworzenie pięciu różnych paczek.

5. Kwadraty w prostokącie

Dane są kwadraty o rozmiarach: 18×18, 15×15, 14×14, 10×10, 9×9, 8×8, 7×7, 4×4 i 1×1.

Rozstrzygnij, czy można te kwadraty ustawić tak, żeby razem tworzyły jeden prostokąt, tzn. bez dziur i nakładania się. Jeśli tak, to podaj długości boków odpowiedniego prostokąta.

Autorką ilustracji do zadań 1, 9 i 12 jest Hanna Kuik, absolwentka V Liceum w Poznaniu.

II seria (do 18 listopada 2016)

6. Binary game

Every day Bolek and Lolek play a game. First Bolek thinks of a five binary digit number, e.g. 10011. Lolek does not know this number. Lolek is allowed to pose questions like: "Is it 10101?" (he can ask about any five binary digit number he wants). Bolek answers and reports to Lolek how many bits in his guess have their correct value in the correct place.

For example, if Bolek's number is 10011 and Lolek's question is "Is it 00110?", then Bolek answers: "No, but 2 bits are correct." Lolek can then ask another question and so on.

Suppose that one day Lolek posed the following six questions and got the corresponding answers:

– Is it 00000? – No, but two bits are correct.

– Is it 01000? – No, but one bit is correct.

– Is it 00100? – No, but three bits are correct.

– Is it 01110? – No, but three bits are correct.

– Is it 11100? – No, but one bit is correct.

– Is it 00001? – No, but three bits are correct.

Is it enough to know the secret number of Bolek? If so, what is it?

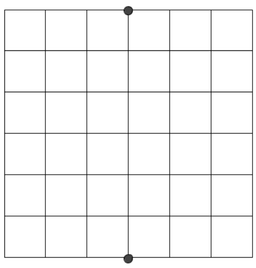
7. Ułamek

Zastąp każdą literę inną z liczb 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, i 9 w taki sposób, aby zachodziła równość:

$$\frac{1}{a\cdot b}+\frac{c}{d\cdot e}+\frac{f}{g\cdot h}=1.$$

Jako odpowiedź podaj dwie liczby: licznik i mianownik ułamka o największej wartości.

8. Tunel



W pewnym mieście siatka ulic tworzy regularną kratę 7 × 7 (jak na rysunku). Wiadomo, że pod miastem, wzdłuż ulic, ciągnie się tunel długości nie większej niż osiem jednostek (odcinków między skrzyżowaniami). Jest pewne, że początek tunelu jest na środkowym południowym skrzyżowaniu, a koniec – na środkowym północnym skrzyżowaniu.

Ekipa wiertnicza ma za zadanie odtworzyć bieg tunelu. Ma wybrać pewne skrzyżowania i wykonać jednocześnie we wszystkich wybranych miejscach odwierty. Odwierty są robione jednocześnie, nie jeden po drugim. Inwestorowi bardzo zależy na czasie, a wykonanie odwiertu jest czasochłonne.

Zakładamy, że dzięki odwiertowi można nie tylko rozstrzygnąć, czy pod wybranym skrzyżowaniem biegnie tunel, ale również określić odcinki ulic prowadzących do skrzyżowania, pod którymi znajduje się tunel. Na przykład można stwierdzić, czy tunel biegnie prosto, czy dochodzi do skrzyżowania z lewej i skręca na północ, itp.

Jaka jest najmniejsza liczba odwiertów gwarantująca odtworzenie biegu całego tunelu?

9. Algorytm Faraona

W XIX w. szkocki kolekcjoner zakupił w Egipcie starożytny papirus, w którym przedstawiono, na konkretnym przykładzie 41 · 59, efektywną metodę mnożenia, w której korzysta się wyłączanie z operacji dodawania. Używając dzisiejszej notacji, zapis z papirusu można by zapisać tak:

1	59
2	118
4	236
8	472
16	944
32	1888

i dalej: 59 + 472 + 1888 = 2419.

Każda pozycja po lewej jest potęgą liczby 2. Każda pozycja po prawej jest wynikiem podwojenia poprzedniej pozycji (dodawanie czegoś do siebie jest względnie łatwe). W pierwszej kolumnie wyróżnione zostały liczby, które w sumie dadzą 41.

Metoda w gruncie rzeczy oznajmia, że:

$$41 \cdot 59 = (1 \cdot 59) + (8 \cdot 59) + (32 \cdot 59),$$

gdzie każdy z iloczynów po prawej może być obliczony przez podwojenie 59 właściwą liczbę razy. Łatwo policzyć, że podczas obliczania 41· 59 tym algorytmem wykonamy siedem dodawań.

Ile dodawań wykonamy obliczając 19· 56?

10. Obraz i czeki

Ekscentryczny malarz polecił Gawłowi sprzedać jego obraz. Gaweł może wystawić go za taką cenę, jaka mu się podoba, ale która jest dodatnią liczbą całkowitą, nie większą niż 10 000. W tym samym czasie ekscentryczny kolekcjoner polecił Pawłowi nabyć wspomniany obraz. Dał mu trzy czeki podpisane in blanco i zapowiedział, że Paweł może płacić za obraz wyłącznie tymi czekami. Musi obraz kupić niezależnie od jego ceny i nie wolno mu domagać się reszty, jeśli kwota na czeku (lub kilku czekach), które wręczy sprzedawcy, będzie większa niż cena obrazu. Sytuacja jest nietypowa, bo Paweł nie tylko nic na tej transakcji nie zarobi, ale nawet może stracić, bo jeżeli rzeczywiście kwota czekowa przewyższy cenę obrazu, Paweł musi zapłacić kolekcjonerowi nadwyżkę.

Paweł nie zna ceny obrazu, wie tylko, że nie przekracza ona 10 000 zł. Idąc po obraz, musi wpisać na każdym czeku dodatnią liczbę złotych. Paweł chce jak najmniej zapłacić po transakcji kolekcjonerowi. Nie lubi ryzyka, więc zależy mu na jak najmniejszej stracie, niezależnie od ceny obrazu.

Podaj kwotę, którą w najgorszym przypadku Paweł zapłaci po transakcji kolekcjonerowi.

Na przykład, gdyby cena obrazu nie przekraczała 4 zł, a Paweł miał tylko dwa czeki, mógłby wpisać 1 zł i 3 zł, co gwarantuje, że nie straci więcej niż złotówkę. Jeżeli ma szczęście, czyli obraz nie będzie kosztował 2 zł, to nic nie straci, ale nas interesuje najgorszy dla Pawła przypadek.

III seria (do 25 listopada 2016)

11. Merge Sort

Merge sort is a fast way of sorting many objects. It works by creating sorted lists. These lists begin very small, and gradually they are merged together until they become a single large sorted list. Consider the following example where we sort the eight letters B R O C C O L I.

- We begin with a single list for each letter:
  (B) (R) (O) (C) (C) (O) (L) (I)
- We merge the lists two at a time. That is, the first list is merged with the second, the third list is merged with the fourth, and so on.
  Each time we merge, we keep the lists sorted:

(B)↔(R) (O)↔(C) (C)↔(O) (L)↔(I)
(B R) (C O) (C O) (I L)

- Again we merge lists two at a time, repeating this process until we have a single large sorted list containing all of our letters:

(B R)↔(C O) (C O)↔(I L)
(B C O R) (C I L O)
(B C O R)↔(C I L O)
(B C C I L O O R)

You are fairly quick at this task – it takes you precisely *k* seconds to merge two lists of size *k*. For instance, the entire sort illustrated above takes you a total of 4×1+2×2+4=12 seconds to complete.

Suppose now that you have a set of 1024 objects to sort. Calculate the total time (in seconds) required.

12. Samochód

W grze komputerowej ,,Koala w aucie" obowiązują następujące zasady:

1. Zawodnik pokonuje przeszkody na trasie i zbiera za to punkty.

2. Zawodnik kieruje pojazdem poruszającym się z różnymi prędkościami, które narzucone są przez system i generowane losowo dla poszczególnych graczy.

3. Określone są cztery rodzaje prędkości:

a) prędkość startowa – z tą prędkością porusza się zawodnik tylko w ciągu pierwszej minuty przejazdu;

b) prędkość bezpieczna – z prędkości startowej pojazd przyspiesza do prędkości bezpiecznej; z tą prędkością zawodnik pojedzie dokładnie przez minutę albo dwie, a po prędkości bezpiecznej pojazd osiąga superszybkość;

c) superszybkość – zawodnik jedzie z tą prędkością dokładnie przez jedną minutę, po czym prędkość zmienia się na prędkość relaksacyjną;

d) prędkość relaksacyjna – zawodnik porusza się z tą prędkością przez jedną minutę, po czym albo zaczyna jechać z prędkością bezpieczną, albo ponownie zaczyna poruszać się z superszybkością.

Ile jest różnych wariantów gry, jeśli wiadomo, że trwa ona 15 minut?

13. Suma

W wyrażeniu $a_1 + 2\cdot a_2 + 3\cdot a_3 + \ldots + 100\cdot a_{100}$, w miejsce zmiennych $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ wstawiamy liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, przy czym nie można podstawić tej samej liczby za różne zmienne.

Jaką najmniejszą wartość wyrażenia można w ten sposób otrzymać?

14. Liście eukaliptusa

Pewien młody koala zjada liście eukaliptusa w porcjach o wadze do 100 gramów. W zależności od tego, jak dużą porcję ten osobnik zje, dłużej lub krócej cieszy się uczuciem sytości. Oznacza to, że czas do kolejnego posiłku zależy od tego, jak dużą porcję zje. Zależność tę przedstawia tabela:

waga porcji	czas poczucia sytości
10 g	25 min
20 g	35 min
30 g	45 min
40 g	60 min
50 g	70 min
60 g	75 min
70 g	80 min
80 g	85 min
90 g	105 min
100 g	125 min

Jaki jest najkrótszy możliwy łączny czas poczucia sytości koali (czyli czas, w którym nie będzie głodny), jeśli dostarczymy mu 260 gramów liści eukaliptusa i założymy, że koala zje wszystko?

15. Iluminacja

Jedna z najbogatszych firm w mieście zamierza opracować reklamę swojego najnowszego produktu w postaci supernowoczesnej laserowej iluminacji.

Postanowiono, że reklama będzie wyświetlana na tle szeregu sąsiednich wieżowców po jednej stronie rzeki. Firma chciałaby znaleźć największą możliwą prostokątną powierzchnię.

Przyjęto przy tym założenie, że reklama będzie wyświetlana powyżej 10 kondygnacji (numerujemy je od 1, tj. bez wyróżniania parteru).

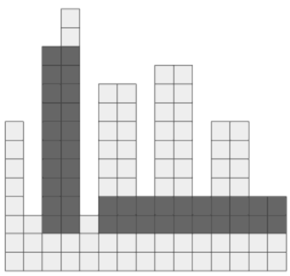
Jaką największą prostokątną powierzchnię firma może wynająć, jeśli szereg wieżowców wygląda tak, jak na rysunku w załączniku do zestawu zadań?

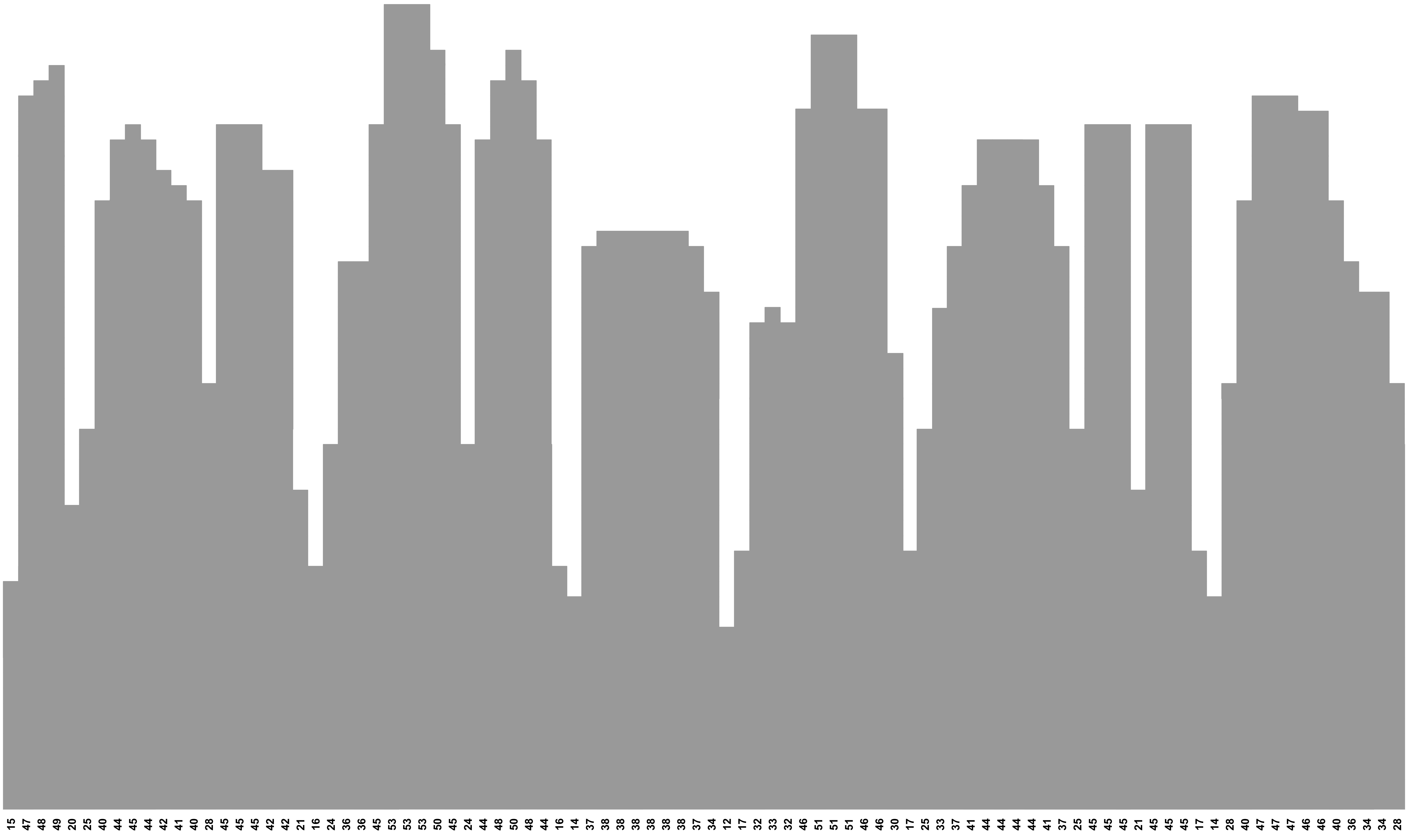
Zakładamy dla uproszczenia, że wszystkie długości na rysunku są wielokrotnościami wysokości kondygnacji. Pod rysunkiem (w załączniku) zapisano informację o liczbie kolejnych kondygnacji w szeregu wieżowców.

Przykład:

Dla danych przedstawionych na rysunku odpowiedzią jest 20.

Uwaga: W przykładzie przyjmujemy, że każdy fragment reklamy musi być wyświetlany powyżej drugiej kondygnacji.




15 47 48 49 20 25 40 44 45 44 42 41 40 28 45 45 45 42 42 21 16 24 36 36 45 53 53 53 50 45 24 44 48 50 48 44 16 14 37 38 38 38 38 38 38 37 34 12 17 32 33 32 46 51 51 51 46 46 30 17 25 33 37 41 44 44 44 44 41 37 25 45 45 45 21 45 45 45 17 14 28 40 47 47 47 46 46 40 36 34 34 28