KOMBINATORYKA
ALGORYTMIKA
LOGIK**A**

EDYCJA **2016**

KONKURS MATEMATYCZNO-INFORMATYCZNY KOALA

ORGANIZOWANY PRZEZ
V LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCE
IM. KLAUDYNY POTOCKIEJ W POZNANIU
WE WSPÓŁPRACY
Z UNIWERSYTETEM IM. ADAMA MICKIEWICZA I POLITECHNIKĄ POZNAŃSKĄ

Prosimy zapoznać się z regulaminem konkursu, dostępnym na stronie http://koala.vlo.poznan.pl/

ZADANIA PIERWSZEGO ETAPU

I seria (do 1 marca 2016)

1. Mentoring

A large company has a system of mentoring apprentices. The senior apprentice, at level-1, mentors two level-2 apprentices. Each of these level-2 apprentices mentors two level-3 apprentices, and so on, up to level-5. Thus there is one level-1 apprentice, two level-2 apprentices, four level-3 apprentices, and so on. But not all level-6 apprentices have two level-7 apprentices.

There are 100 apprentices in the company and seven levels. How many apprentices are there at level-7?

2. Wyścigi po drabinie

Jedną z dyscyplin w czasie pewnego konkursu strażackiego były wyścigi wspinania się po drabinie. Konkurs okazał się nie lada wyzwaniem. Zgodnie z regulaminem zwycięzcą wyścigu wspinania się po drabinie miał zostać najszybszy spośród zawodników, którzy postawili stopę na jak najmniejszej liczbie szczebli. Czas liczony był do momentu postawienia stopy na najwyższym szczeblu drabiny.

Drabina używana w czasie zawodów była pozbawiona niektórych szczebli (jak na rysunku). Ze względów bezpieczeństwa podczas wspinania się po drabinie nie wolno było omijać więcej niż jednego szczebla drabiny (lub miejsca, w którym szczebel powinien być).

Rozstrzygnij, jaka jest najmniejsza liczba szczebli, na których trzeba postawić stopę w czasie wspinania się po drabinie przedstawionej na rysunku (po prawej).

Przykład: Dla krótszej drabiny (rysunek po lewej stronie) najmniejsza liczba szczebli, na których trzeba postawić stopę w czasie wspinania się po drabinie to sześć szczebli.

Autorką ilustracji do zadań 3, 9 i 14 jest Hanna Kuik, absolwentka V Liceum w Poznaniu.

3. Zapasowy szyfr

Współcześni tajni agenci wywiadu nie muszą niczego szyfrować ręcznie. Komputery świetnie nadają się do zadań wymagających powtórzeń, takich jak szyfrowanie. Nie znaczy to jednak, że agenci nie muszą się znać na sztuce szyfrowania. Komputer może się zepsuć i w skrajnym przypadku agent musi umieć posłużyć się zapasowym szyfrem. Poniżej znajduje się fragment szyfrogramu, który jest efektem zastosowania na pewnym łańcuchu znaków prostej metody szyfrowania, w której każdą literę zastępuje się inną literą (zawsze tą samą):

X Y X Z Y X T Z Y X W X S U X U S W X X R U X

Wiedząc, że żadna litera nie jest szyfrowana przez nią samą i że tekst jawny na pewno zawiera trzy zaszyfrowane słowa: MARIA, JOLA, ASIA, odszyfruj cały komunikat.

Uwaga: Brak odstępów i użycie dużych liter łacińskich ma na celu utrudnienie deszyfrowania.

4. Gra liczbowa

W pewnej grze liczbowej o sześciocyfrowych numerach na kuponach „szczęśliwe" są te numery, których suma cyfr stojących na miejscach parzystych jest równa sumie cyfr stojących na miejscach nieparzystych.
Na przykład kupon 631752 jest uważany za „szczęśliwy", gdyż 6 + 1 + 5 = 3 + 7 + 2 = 12.

Ile jest „szczęśliwych" kuponów o numerach od 000000 do 999999?

5. Tęczaki

Pewnego dnia znany polski podróżnik Kazik Nowak przemierzał, jak zwykle na swym rowerze, Czarny Ląd. Nagle najechał na leżący w poprzek drogi konar, spadł z roweru i stracił przytomność. Gdy się ocknął, zobaczył dziwne stworzonko. Był to tęczak, czyli robak, który każdego dnia ma inny kolor, a zmienia go cyklicznie: czerwony, niebieski, zielony, biały, czerwony... (w skrócie: C N Z B C ...). Za tym tęczakiem w równej linii było jeszcze dziewięć tęczaków o kolorach odpowiednio: Z C N Z N B N N B.
Jak wyglądałby ciąg kolorów tych dziewięciu robaków, gdyby Kazik Nowak spotkał za 366 dni te same robaki, stojące w tym samym porządku?

II seria (do 8 marca 2016)

6. Broken memory

A block of computer memory is controlled by eight switches. If A and 1 switches are set, the contents of the A1 cell should be read, and so on. The actual contents of the block are shown in the table below.

	A	B	C	D
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	1	1	0

A characteristic of the computer memory is that if a column switch is broken, then all cells in a row will read the value of the cell in the “broken” column.

For example, if switch A was broken, then A1, B1, C1, D1 would all read the value in A1; and A2, B2, C2, D2 would all read the value in A2.
Similarly, if a row switch is broken, then all cells in a column will read the value of the cell in the “broken” row. For example, if switch 3 was broken, then A1, A2, A3, A4 would all read the value in A3.

One of the switches is broken. After three readings, the A1 cell reads 0, the B2 cell reads 1, the D1 cell reads 0. Which switch is broken?

7. Magiczna układanka

Na polach kwadratu (rysunek poniżej) rozmieść cyfry od 1 do 9 (w każdym polu inna) w taki sposób, aby suma liczb położonych na jednej linii prostej poziomej, pionowej lub ukośnej w jak największej liczbie przypadków wynosiła 15.

Jeśli zadanie ma więcej niż jedno rozwiązanie, podaj jedno z nich.

8. Gra w sumy

Kasia zapisała na 15 kartkach 15 różnych liczb. Następnie wybrała siedem kartek, ułożyła je jedną obok drugiej i uporządkowała według wartości liczbowych – od najmniejszej do największej.
W końcu Kasia odwróciła każdą z kartek, tworząc szereg A: □ □ □ □ □ □ □.

Podobnie postąpiła z pozostałymi ośmioma kartkami, tworząc szereg B: □ □ □ □ □ □ □ □.

W tym momencie do gry przystąpił Wojtek. Miał za zadanie wybrać jakąkolwiek liczbę i sprawdzić, czy tę liczbę da się zapisać jako sumę liczby z szeregu A i liczby z szeregu B. Wojtek wybrał liczbę i zdradził ją Kasi. Teraz Wojtek może zadawać Kasi pytania według następujących zasad: za każdym razem wskazuje jedną kartkę z szeregu A i jedną z szeregu B i pyta „Jaka jest suma tych liczb?”. Kasia odpowiada, zgodnie z prawdą: albo „Jest równa twojej liczbie”, albo „Jest większa od twojej liczby”, albo „Jest mniejsza od twojej liczby”.

Podaj najmniejszą liczbę, dla której potrafisz sformułować uzasadnienie, że taka liczba pytań zawsze pozwoli Wojtkowi rozwiązać zadanie (niezależnie od liczb zapisanych przez Kasię i liczby wybranej przez Wojtka).

9. Optymalny zakup

Janek dostał od rodziców 200 zł na zakup podręczników, przy czym wszystko, co zaoszczędzi, miało być dla niego. Postanowił więc zrobić zakupy przez Internet.

Okazało się, że w każdym z 10 sklepów internetowych cena jest nieco inna. Każdy ze sklepów ma też własny koszt dostawy doliczany niezależnie od tego, ile w nim zakupi książek.

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10
język polski	13	19	16	19	19	18	17	16	15	14
matematyka	18	13	17	14	15	16	15	17	18	17
j. angielski	17	14	13	17	16	18	16	17	18	17
historia	19	18	17	13	16	15	15	16	17	14
plastyka	16	14	17	18	13	16	15	16	17	16
geografia	17	17	16	14	15	13	16	17	18	16
biologia	17	14	16	17	15	16	13	18	19	17
fizyka	17	16	15	14	17	16	15	13	15	15
chemia	15	15	16	18	17	15	16	15	13	14
muzyka	16	14	16	18	17	17	15	16	18	13
dostawa	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Janek próbował najpierw kupić wszystkie podręczniki w jednym sklepie, ale wszędzie było na tyle drogo, że niewiele mógł zaoszczędzić.

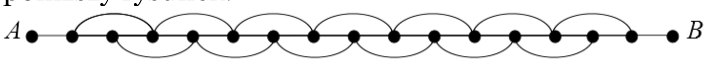
	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10
suma	169	158	163	166	164	164	157	165	172	157

Próbował więc kupować każdy z podręczników w najtańszym dla niego sklepie, ale to powodowało, że każdy musiał kupować w innym i koszty dostawy doliczały się z każdego sklepu, a więc w rezultacie musiałby zapłacić $10\cdot(13+4)=170$.
Wtedy postanowił spróbować podzielić zakupy na kilka paczek – każda z innego sklepu.

Pomóż Jankowi, zlecając zakup podręczników w takich sklepach, by suma była jak najmniejsza i by jak najwięcej pieniędzy zaoszczędził dla siebie. Jako odpowiedź podaj zaoszczędzoną kwotę.

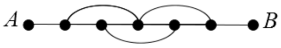
10. Podróże krętymi ścieżkami

Podróżujesz z miasta A do miasta B, poruszając się zawsze w kierunku miasta B, mijając po drodze inne miasta. Sieć dróg między miastami pokazuje poniższy rysunek.



Na ile sposobów możesz dojechać z A do B?

Na przykład po sieci dróg:



moglibyśmy podróżować na 5 sposobów.

III seria (do 15 marca 2016)

11. Geralt's game

Geralt and Ciri play a game on the $1 \times n$ board, with a positive integer n. They take turns and in every turn a player puts one stone on a cell of the board. One cannot put a stone on a non-free cell (i.e. a cell with a stone) and on its adjacent cells. A player loses the game when he/she has no possible move . Geralt begins the game.

Analyse the game for every n, less than 14. For how many such numbers does Geralt have a winning strategy?

12. Tablica

Na tablicy w sali matematycznej są trzy okienka z napisanymi w nich liczbami całkowitymi. Na każdej kolejnej lekcji dyżurny zmienia liczby w okienkach według następującego przepisu:

Jeżeli na jakiejś lekcji w okienkach jest

x	y	z

to
1. gdy x jest parzyste, wtedy na następnej lekcji w okienkach będzie

$x/2$	y	$z+z$

2. gdy x jest nieparzyste, wtedy na następnej lekcji w okienkach będzie

$(x-1)/2$	$y+z$	$z+z$

Na przykład, jeżeli w pewnym momencie jest:

41	3	12

to na następnej lekcji będzie:

20	15	24

a na kolejnej:

10	15	48

Załóżmy, że na początku na tablicy widzimy

$2^{10} \cdot 5^{22}$	0	$9 \cdot 2^{12}$

Jaka liczba będzie w środkowym okienku w momencie, gdy w pierwszym pojawi się 0?

13. Sumy iloczynów

Rozważmy sumę iloczynów sąsiednich wyrazów ciągu liczbowego (skończonego). Na przykład dla ciągu 2, 1, 3, 4 taka suma wynosi $2\cdot1+1\cdot3+3\cdot4=17$.

Rozważmy wszystkie 100-wyrazowe ciągi, w których każda z liczb 1, 2, 3, ..., 100 występuje dokładnie raz. Dla których z nich suma iloczynów sąsiednich wyrazów jest największa? Jako odpowiedź podaj przykład takiego ciągu.

14. Tajemniczy prostopadłościan

Spotkały się dwie nauczycielki matematyki:
— O, widzę, ze dźwigasz worek drewnianych klocków. Mam prawie taki sam komplet: składa się, z takich jak twoje, litrowej objętości sześcianików, tylko ja mam ich mniej. Wczoraj moja klasa zbudowała z nich kanciastego żółwia. Był tak piękny, że wszystko mu dokładnie przeliczyliśmy: objętość, pole powierzchni...
— Pamiętam, opowiadałaś o tym. A moja klasa jest jeszcze bardziej zdolna. Dzisiaj z wszystkich moich 162 klocków zbudowała zachwycający prostopadłościan.
— Zachwycający? A jakie miał proporcje boków? Na podstawie twojej opowieści nie mogę tego wywnioskować.
— W takim razie dodam, że miał pole powierzchni takie samo jak wczorajszy żółw twojej klasy.
— Hmm... Ciągle mam za mało danych.
— A wiesz, nasz prostopadłościan stał solidnie na podłodze, ale ściana zawierająca najdłuższą krawędź prostopadłościanu nie leżała na podłodze.
— Ach tak, teraz już wiem, jakiej długości boki miał wasz prostopadłościan.

Jakie są wymiary prostopadłościanu?

15. Głodna żaba

Głodna żaba siedzi nad strumieniem i zamierza przeskoczyć na drugi brzeg po liściach nenufarów, skacząc zawsze w kierunku drugiego brzegu i lądując po każdym skoku albo na nenufarze, albo na drugim brzegu. Po drodze żaba zjada muchy. Na rysunku poniżej widzimy liście, z przyporządkowanymi im liczbami.

W każdym skoku żaba może albo przeskoczyć na sąsiedni nenufar, albo przeskoczyć nad jednym nenufarem. Jeżeli przeskakuje na sąsiedni nenufar, liczba na docelowym nenufarze oznacza liczbę zjedzonych w czasie tego skoku much. Jeżeli przeskakuje nad nenufarem, zjada podwojoną liczbę much, napisaną na nenufarze docelowym.

Jaka jest największa liczba much, jaką może zjeść żaba? Ile skoków wtedy wykona?

Przykładowo, gdyby nenufary były trzy i miały przyporządkowane liczby kolejno: 4, 2 i 3, to żaba skacząc zawsze na sąsiedni nenufar, zjadałaby 9 much i robiłaby cztery skoki. Z kolei, skacząc na pierwszy, a potem na trzeci nenufar (przeskakując nad drugim nenufarem), żaba zjadałaby 10 much, a skoki wykonywałaby trzy (wliczamy skok na drugi brzeg).