Konkurs matematyczno-informatyczny KOALA

VII edycja

II etap

21 lutego 2020

- Czas na zadawanie pytań: pierwsze 30 minut.
- Rozwiązanie każdego zadania prosimy zapisać w języku polskim, **na innej kartce**.
- Każdą kartkę rozwiązania prosimy **podpisać nazwą drużyny**.
- **Odpowiedź bez uzasadnienia nie jest rozwiązaniem**. Im więcej komentarzy, tym lepiej.
- Za rozwiązanie każdego zadania można otrzymać od 0 do 10 punktów.
- Czas pracy to 120 minut. Powodzenia!

1. Computer

The number 123 is shown on the screen of a computer. Each minute the computer adds 102 to the number on the screen. A computer expert Rafał may change the order of digits in the number on the screen whenever he wishes. It is allowed for 0 to be at the beginning of a number.

Can he ensure that no four-digit number ever appears on the screen? Justify the answer.

2. Pustynia

Na jednym z krańców pustyni stoi ciężarówka oraz znajduje się tam stacja benzynowa z nieograniczoną ilością paliwa. Ciężarówka jednorazowo tankuje do baku paliwo (zwane ładunkiem; przyjmujemy, że jeden pełen zbiornik paliwa to jeden ładunek), które starcza jej do przejechania 600 km. Ciężarówka może przewozić paliwo wyłącznie w baku. W dowolnym miejscu na pustyni kierowca ciężarówki może urządzić stację benzynową, czyli zostawić tam paliwo (część ładunku), które potem załaduje.

Ile najmniej ładunków potrzebuje zabrać ciężarówka ze stacji początkowej, żeby przejechać przez całą pustynię po prostej drodze, do oddalonej o 800 km stacji końcowej?

Należy założyć, że ciężarówka przez cały czas jazdy ma stałe spalanie (niezależne od prędkości, ukształtowania terenu oraz innych czynników).

3. Punkty i odcinki

Kasia wybiera pięć różnych punktów kratowych na płaszczyźnie, a następnie rysuje wszystkie odcinki o końcach w tych punktach. Czy może to zrobić w taki sposób, aby środek żadnego z tych odcinków nie był punktem kratowym? Jeśli tak, to podajcie przykład takich pięciu punktów. Jeśli nie, to uzasadnijcie, dlaczego nie można wybrać takich pięciu punktów.

Przypominamy, że punkty kratowe to punkty w układzie współrzędnych, których obie współrzędne są całkowite.

4. Bogaty łotr

Na pewnej wyspie mieszkają wyłącznie rycerze, którzy zawsze mówią prawdę i łotrzy, którzy zawsze kłamią. Niektórzy z nich są bogaci, a inni biedni; nie ma klasy średniej i podział ten dotyczy zarówno rycerzy jak i łotrów. Pewnego dnia na wyspę przybywa piękna i dumna księżniczka, która postanowiła, że poślubi tylko bogatego łotra. Księżniczka jest świadoma zasad panujących na wyspie i aby zgodziła się poślubić kawalera, musi on wypowiedzieć zdanie, którego nigdy nie wyrzekłby przedstawiciel innej grupy społecznej (czyli rycerz) lub ekonomicznej (czyli biedny).

Jak zakochany w księżniczce bogaty łotr może w jednym zdaniu przekonać ją o swoich przymiotach, czyli o tym, że jest bogatym łotrem? Podajcie przykład takiego zdania. Nie zapomnijcie o uzasadnieniu odpowiedzi.

5. Pinokio i cukierki II

Pinokio ma 18 cukierków w trzech rodzajach: krówki, landrynki i michałki. Postanowił rozdzielić je wszystkie na kilka paczek, przy czym w każdej paczce musi być przynajmniej jeden cukierek, a paczki mają być istotnie różne. Pinokio uznaje dwie paczki za istotnie różne, jeśli zachodzi co najmniej jeden z poniższych warunków:

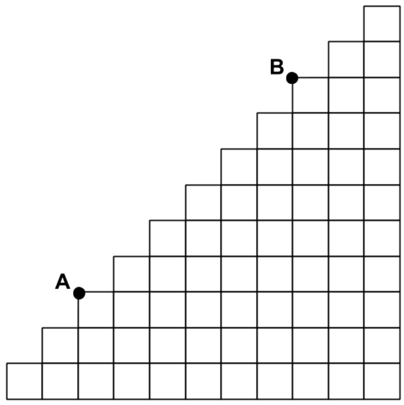
- w jednej paczce są co najmniej dwa cukierki więcej jednego rodzaju niż w drugiej paczce (np. paczki KL i KLLL są istotnie różne, bo pierwsza z nich zawiera jedną landrynkę, a druga trzy),
- liczba cukierków w przynajmniej dwóch rodzajach jest różna w tych paczkach (np. paczki KL i KM są istotnie różne, bo zarówno liczba landrynek, jak i michałków jest inna).

Jaka jest największa liczba paczek, na które Pinokio może rozdzielić cukierki, jeśli krówek jest 5, landrynek 6 a michałków 7? Podajcie przykład takiego podziału. Nie zapomnijcie uzasadnić, że więcej paczek być nie może.

Przykład: Gdyby Pinokio miał 1 krówkę, 3 landrynki i 1 michałka, to mógłby stworzyć np. paczki: K, L, LLM, ale nie mógłby rozdzielić cukierków w następujący sposób: L, KL, ML (bo dwie pierwsze paczki różniłyby się tylko jednym cukierkiem).

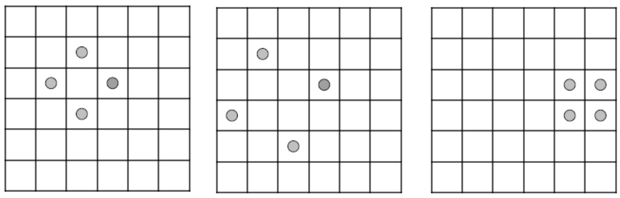
6. Spacer

Na rysunku przedstawiono sieć alei w pewnym parku. Wszystkie odcinki każdej alei są równej długości. Punktami A i B zaznaczono wejścia do parku. Na ile sposobów możemy odbyć spacer zaczynający się w A i kończący się w B, jeśli zależy nam na tym, aby był jak najkrótszy? Chodzimy oczywiście alejkami, nie na skróty.



7. Gra hip

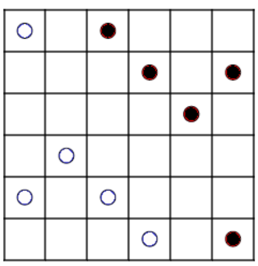
Zasady gry hip są następujące: Gra odbywa się na szachownicy 6×6. Gracze stawiają na przemian swoje pionki (pierwszy – białe, drugi – czarne) na niezajętych polach szachownicy. Przegrywa gracz, którego pionki utworzą 4 wierzchołki kwadratu (dowolnego rozmiaru i dowolnie obróconego, patrz przykłady na rysunku 1).



rys.1. przykładowe kwadraty

Jeśli gracze zakryją całą planszę, nie tworząc żadnego kwadratu, gra kończy się remisem.

Panda i koala grają w grę hip, panda jest pierwszym graczem. Po dziesięciu ruchach sytuacja wygląda tak:



Jakim wynikiem zakończy się ta gra przy założeniu, że gracze są mistrzami gry hip i grają bezbłędnie?

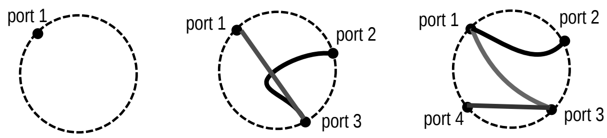
8. Porty

Pośrodku pewnej gminy leży ogromne jezioro o kształcie zbliżonym do koła. Wójt pragnie ożywić jezioro gospodarczo i turystycznie. Chce on w wybranych miejscowościach utworzyć porty, z których wypływają promy do innych portów. Przyjął przy tym założenie, że każdy port połączony będzie przeprawą promową z co najwyżej czterema innymi. Ponadto każde dwa porty nad tym jeziorem mają być połączone za pomocą co najwyżej jednej przesiadki.

(a) Ile portów potraficie zbudować (zgodnie z powyższymi regułami) nad jeziorem? Im więcej, tym lepiej. Prócz portów narysujcie też trasy promów. Trasy mogą się przecinać.

(b) Jaka jest liczba portów, dla której nie istnieje zgodne z powyższymi regułami zaplanowanie tras promów? Chodzi tu o liczbę dodatnią. Im mniejszą liczbę potraficie znaleźć (i oczywiście uzasadnić), tym lepiej.

Na poniższych rysunkach przedstawimy przykładowe zgodne z regułami i jedno niezgodne z regułami rozmieszczenie portów.



dobrze *dobrze* *źle*