KOMBINATORYKA
ALGORYTMY
LOGIK**A**

KOALA 2019

MECZ

DOLNY ŚLĄSK - WIELKOPOLSKA

Zadań jest 10. Czas na rozwiązywanie: 90 min.

1. Wieże

Na szachownicy 10×10 umieszczono 41 wież. Uzasadnij, że istnieje wśród nich pięć, z których żadne dwie się nie atakują (tzn. nie są w tej samej kolumnie ani tym samym wierszu).

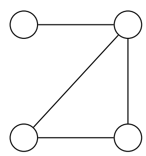
2. Triangulacje

Triangulacją wielokąta wypukłego nazywamy taki zbiór jego nieprzecinających się przekątnych, który dzieli go na trójkąty. Ile triangulacji ma ośmiokąt? Uwaga: rozróżniamy wierzchołki, więc np. prostokąt ma dwie triangulacje.

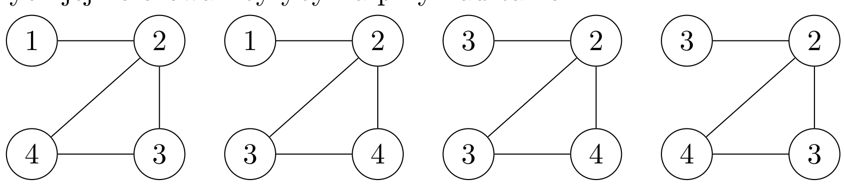
3. Kolorowanki

Jaś i Małgosia zrobili mapy swoich królestw – każdą osadę zaznaczyli kółkiem i połączyli te, między którymi istnieje droga. Następnie każde z nich policzyło, na ile sposobów może pokolorować osady ze swojej mapy tak, aby każda była albo czerwona, albo niebieska, albo zielona, albo szara i aby każde dwie osady bezpośrednio połączone drogą miały różne kolory. Każde takie pokolorowanie nazwiemy dobrym kolorowaniem mapy. Jaś obliczył, że jego mapa ma j dobrych kolorowań, a Małgosia – że jej mapa ma dobrych kolorowań m. Następnie dzieci postanowiły połączyć jedną osadę Jasia drogą z jedną osadą z królestwa Małgosi. Ile jest dobrych kolorowań tak otrzymanej wspólnej mapy?

Przykład: Dla mapy



cztery z wielu dobrych jej kolorowań byłyby na przykład takie:



Na rysunkach liczby zastępują kolory.

4. Ciągi binarne

Ile jest ciągów długości 100, w których każdy wyraz to 0 lub 1, a liczba jedynek jest parzysta?

5. Tajemnicza liczba

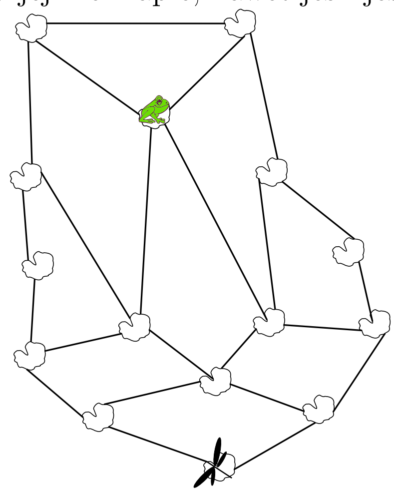
Na tablicy napisano 94 dwójki i 6 trójek. W pojedynczym ruchu wybieramy dwie liczby aktualnie zapisane na tablicy, nazwijmy je a i b (przy czym a i b mogą być równe), ścieramy je, a zamiast nich piszemy wartość $ab - a - b + 2$. Jaka liczba pozostanie na tablicy po 99 takich ruchach?

6. Prostokąt z kwadratów

Jaka jest najmniejsza liczba kwadratów o bokach całkowitej długości, na które można rozciąć prostokąt 10×11?

7. Polowanie

Żaba i ważka siedzą na liściach, w położeniu jak na rysunku. Na zmianę wykonują ruchy, najpierw żaba, potem ważka. Ruch żaby polega na przeskoczeniu na liść połączony bezpośrednio linią z tym, na którym siedzi. Ważka w każdym ruchu przelatuje na liść połączony bezpośrednio z jej aktualnym liściem. Jeśli żaba wyląduje na liściu, na którym akurat siedzi ważka, natychmiast ją zjada, zanim ta wykona ruch. Jeżeli zaś ważka przyleci na liść, na którym siedzi żaba, to żaba – o dziwo – nie zjada ważki, tylko robi swój skok. Żaba i ważka widzą siebie nawzajem cały czas. Czy żaba ma taki sposób skakania, że złapie nawet bardzo sprytną ważkę? Czy może wręcz przeciwnie, to znaczy ważka ma taki sposób poruszania się, że żaba nigdy jej nie złapie, nawet jeśli jest bardzo sprytnym płazem?



8. Przyjaciele na obozie

Na obozie jest k uczniów. Wiadomo, że wśród nich znajdziemy pięcioro, wśród których nie ma par przyjaciół, znajdziemy też pięcioro, wśród których jest dokładnie jedna para przyjaciół, i tak dalej, aż do pięciorga, wśród których jest dokładnie 10 par przyjaciół. Opisz wszystkie k, dla których taka sytuacja jest możliwa. Nie zapomnij o uzasadnieniu, że inne liczby są wykluczone.

9. Złośliwa centrala telefoniczna

Dawno, dawno temu pewną wewnętrzną sieć telefoniczną obsługiwała złośliwa centrala. Numery w sieci składały się z trzech dowolnych cyfr, czyli numerów było 1000. Gdy użytkownik wybierał numer, centrala przestawiała niekiedy jakieś dwie sąsiednie cyfry, przez co użytkownikowi zdarzało się rozmawiać z niewłaściwą osobą. Na przykład wybrał 318, a mógł być połączony albo z 318, albo z 138, albo z 381. Szefowie sieci postanowili zlikwidować część numerów telefoniczych, aby za każdym razem rozmówca na pewno albo połączył się z właściwym numerem, albo usłyszał: „nie ma takiego numeru”. Na przykład, jeśli z grupy numerów 318, 138, 381 szefowie pozostawiliby tylko 381, to rzeczywiście dzwoniący na ten numer może usłyszeć „nie ma takiego numeru”, gdy centrala przestawi jakieś sąsiednie dwie cyfry, ale przynajmniej nie będzie rozmawiać z niewłaściewą osobą. Jaką największą liczbę numerów może pozostawić szefostwo?

10. Jaskinie i korytarze

Krasnoludy znalazły 16 jaskiń, ułożonych w kratę 2×8. Chcą połączyć je siecią korytarzy, by z każdej jaskini do każdej innej dało się dojść (bezpośrednio lub przechodząc przez inne jaskinie). Mogą tylko wykopać 15 korytarzy bezpośrednio łączących dwie jaskinie, w dodatku każdy korytarz musi biec albo poziomo, albo pionowo. Na ile sposobów mogą stworzyć sieć połączeń?

Przykład: Gdyby jaskinie tworzyły kratę 2×3, a bezpośrednich korytarzy miało być pięć, trzy z wielu sieci połączeń mogłyby wygladać tak: