© Hanna Kuik

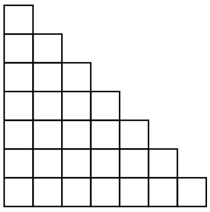
Konkurs matematyczno-informatyczny KOALA
VI edycja konkursu

Finał ponadgimnazjalny
25 kwietnia 2019

- Czas na zadawanie pytań: pierwsze 30 minut.
- **Odpowiedź bez uzasadnienia nie jest rozwiązaniem**. Im więcej komentarzy, tym lepiej.
- Czas pracy to 120 minut. Powodzenia!

1. Policz prostokąty

Ile prostokątów utworzonych z sąsiadujących kratek znajduje się na poniższym rysunku „trójkąta schodkowego"?



2. Dobry porządek

10 ludzi postanowiło stanąć w rzędzie jeden za drugim, w dobrym porządku, to znaczy tak, by nikt nie miał bezpośrednio przed sobą człowieka, który przewyższa go wzrostem o więcej niż 8 cm. Załóżmy, że wzrosty (w centymetrach) mają takie:

140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185.

Na ile sposobów mogą stanąć w dobrym porządku?

Na przykład dla pięciorga ludzi o wzrostach: 160, 165, 170, 175, 180, jednym z wielu dobrych porządków byłby ciąg: 160, 170, 165, 180, 175 (zakładamy, że pierwszy od lewej stoi plecami do drugiego, itd.), natomiast ciąg 175, 180, 165, 170, 160 byłby porządkiem złym.

3. Znikające monety

Masz 14 monet, przy czym 7 z nich to monety prawdziwe, ważące 1 dag każda, pozostałe są fałszywe i każda z nich waży 0,999 dag. Nie możesz odróżnić monet ani po wyglądzie (wszystkie wyglądają identycznie), ani ważąc je w dłoni. Jedynym twoim przyrządem do pomiaru jest bardzo precyzyjna waga szalkowa bez odważników. Możesz wykonać tyle ważeń, ile chcesz, kładąc na szalkach dowolną liczbę monet (niekoniecznie po tyle samo). Na monety nałożona jest klątwa: po każdym ważeniu, w którym jedna szalka opadła niżej, znika jedna z monet z tej szalki i już nigdy jej nie odzyskasz, w dodatku znika prawdziwa, jeśli tam taka jest. Jeżeli obie szalki pozostały na tym samym poziomie, to nic się nie dzieje. Twoim zadaniem jest znaleźć przynajmniej jedną prawdziwą monetę, zanim zniknie. Czy istnieje sposób ważenia, który to gwarantuje? Jeśli tak, to go opisz i uzasadnij jego poprawność. W przeciwnym wypadku udowodnij, że zadanie jest niewykonalne (przy założeniu, że masz pecha i nie znajdziesz monety przez łut szczęścia).

4. Włamywacz

Włamywacz chciałby otworzyć zamek. Zamek ma trzy klawisze – A, B, C. Włamywacz nie zna kodu otwierającego zamek, ale wie, że kod składa się z trzech liter a każda z nich to A, lub B, lub C (litery mogą się powtarzać). Sekwencja wciskania klawiszy może być dowolnie długa, przy czym nie można klawiszy wciskać jednocześnie. Zamek otwiera się, gdy w sekwencji wciskanych klawiszy pojawią się kolejno trzy litery kodu, we właściwej kolejności. Przygotowując się do pracy, włamywacz przygotował sobie ściągę, czyli zapisał sekwencję klawiszy, jakie kolejno będzie wciskał. Przyjrzał jej się bliżej i zatarł ręce z radości: odkrył bowiem, że sekwencja ta gwarantuje, że otworzy zamek. Co więcej, sekwencja ta jest najkrótszą sekwencją gwarantującą otworzenie zamka. Podaj przykładową sekwencję, która mogła pojawić się na ściądze i wyjaśnij, dlaczego nie można użyć mniejszej liczby liter.

5. Sito Eratostenesa

Roztargniony Roch postanowił zastosować sito Eratostenesa dla liczb od 2 do 1000 (opis tego słynnego algorytmu znajduje się poniżej). Wykreślając wielokrotności dwójki, pomylił się i prócz wszystkich liczb parzystych większych od 2 wykreślił niechcący dwie nieparzyste liczby pierwsze. Dalej stosował już algorytm bezbłędnie. Na końcu okazało się, że liczb niewykreślonych pozostało tyle, ile jest liczb pierwszych od 2 do 1000. Jaka jest największa możliwa liczba pierwsza, którą Roztargniony Roch przez pomyłkę wykreślił?

Sito Eratostenesa dla liczb od 2 do n, gdzie $n > 2$ jest liczbą naturalną, działa tak: Wyobraźmy sobie, że na początku wszystkie liczby są czarne. W pierwszym kroku zaznaczamy na czerwono liczbę 2 i wykreślamy wszystkie jej wielokrotności większe od niej samej, to jest: 4, 6, 8, itd. W każdym kolejnym kroku wybieramy najmniejszą czarną i niewykreśloną liczbę, zaznaczamy na czerwono i wykreślamy wszystkie jej wielokrotności większe od niej samej. Nie przejmujemy się tym, że niektóre liczby będą skreślane więcej niż raz. Kończymy działanie, gdy nie pozostały żadne czarne i niewykreślone liczby. Na przykład dla $n = 12$ kolejne kroki algorytmu są następujące (zamiast czerwonego użyliśmy pogrubienia):

$\mathbf{2}, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, 9, \cancel{10}, 11, \cancel{12}$
$\mathbf{2}, \mathbf{3}, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}$
$\mathbf{2}, \mathbf{3}, \cancel{4}, \mathbf{5}, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}$
$\mathbf{2}, \mathbf{3}, \cancel{4}, \mathbf{5}, \cancel{6}, \mathbf{7}, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}$
$\mathbf{2}, \mathbf{3}, \cancel{4}, \mathbf{5}, \cancel{6}, \mathbf{7}, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, \mathbf{11}, \cancel{12}$

6. W Krainie Czarów

W Krainie Czarów mieszkają: Lew, który kłamie tylko w poniedziałki, wtorki i środy, Jednorożec kłamiący tylko w czwartki, piątki i soboty oraz bliźniacy Tweedledum i Tweedledee. Jeden z braci jest jak Lew (kłamie tylko w poniedziałki, wtorki i środy), a drugi jest jak Jednorożec (kłamie tylko w czwartki, piątki i soboty). Pewnego dnia Alicja spotkała Tweedledum i Tweedledee (tak podobnych do siebie, że nie mogła ich odróżnić), rozmawiających tak:

— Pierwszy: Jutro jest jeden z dni, kiedy Tweedledee kłamie.

— Drugi: Lew kłamał wczoraj.

— Pierwszy: Dziś nie jest niedziela.

— Drugi: Dziś jest poniedziałek.

Czy Tweedledum jest jak Lew, czy jak Jednorożec?

7. Nowoczesny sejf

Koala dotarł do informacji o haśle do nowoczesnego sejfu, w którym zoo przechowuje zapasy liści eukaliptusa. Hasło jest ciągiem liczb 2, 10, 14 (w tej kolejności). Sejf jest obsługiwany przez elektroniczny panel kontrolny, którego klawiatura posiada cztery przyciski: +7, +5, pierwiastek (zmieniające liczbę na wyświetlaczu) i Enter (akceptujący obecnie wyświetlaną liczbę jako kolejny element hasła). Na początku wyświetlacz pokazuje 0. Aby zniechęcić do prób włamania, sejf tak zaprogramowano, że jego zawartość ulegnie samozniszczeniu, jeśli liczba do wyświetlenia będzie niecałkowita, lub większa od 60, lub została wyświetlona wcześniej. Czy koala może dostać się do sejfu, nie niszcząc jego zawartości?

8. Żelazko

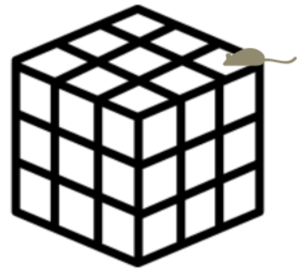
Rafał chce uprasować Kasi koszulę. Dawno tego nie robił i okazało się, że w jego turystycznym żelazku zasilanym dwoma paluszkami obie baterie są przeterminowane i nie działają. Na domiar złego, w pudełku z ośmioma bateriami sprawne baterie pomieszały się ze zużytymi; Rafał pamięta jednak, że w pudełku były cztery sprawne i cztery zużyte. Aby żelazko działało, obie włożone do niego baterie muszą być sprawne. Rafał chce znaleźć parę działających baterii, dokonując jak najmniej wymian baterii. Przez wymianę rozumiemy wyjęcie dwóch barterii i załadowania dwóch, niekoniecznie innych.

(a) Jaka liczba wymian pary baterii gwarantuje, że żelazko zadziała, nawet jeśli Rafał ma pecha? Im mniejszą liczbę znajdziesz, tym lepiej.

(b) Jaka liczba wymian nie wystarczy, jeśli Rafał ma pecha? Im wieksza liczbę potrafisz znaleźć (i oczywiście uzasadnić), tym lepiej.

9. Myszka bierze serek

Ser jest dużym sześcianem złożonym z 27 identycznych sześcianików. Mysz zaczyna podróżować po serze: nie musi zjeść wszystkiego, ale musi dostać się do wnętrza każdego sześcianika (to mała mysz i na pewno do wnętrza sześcianika się zmieści). Mysz nigdy nie wchodzi ponownie do raz odwiedzonego sześcianika, a kolejny wybrany przez nią sześcianik musi mieć wspólną ściankę z tym, w którym mysz siedzi. Mysz zaczyna od odgryzienia kawałka z wnętrza sześcianika narożnego. Czy może się zdarzyć, że mysz spełni swą konsumpcyjną misję i zakończy podróż w środkowym (wewnętrznym) sześcianiku kostki sera?



10. Ternarna zgadywanka

Bolek i Lolek bawią się w ternarną zgadywankę. Najpierw Bolek wymyśla w tajemnicy przed Lolkiem pięcioelementowy ciąg ternarny (czyli taki, którego każdy wyraz to 0, lub 1, lub 2), na przykład 01221. Następnie Lolek zadaje serię pytań typu „Czy pomyślałeś o 20112?” (seria pytań może być dowolnie długa, w każdym pytaniu Lolek może pytać o dowolny pięcioelementowy ciąg ternarny). Po zakończeniu serii pytań Bolek odpowiada na każde pytanie zgodnie z prawdą oraz informuje Lolka, ile cyfr zgadł, to znaczy na ilu miejscach ciągu Lolka są właściwe wartości. Gdyby sekretnym ciągiem Bolka był 00201, a Lolek zadał dwa pytania: „Czy pomyślałeś o 20112?” oraz „Czy pomyślałeś o 00201?”, to po zadaniu drugiego pytania otrzymałby dwie odpowiedzi Bolka: „Nie, ale odgadłeś 1 cyfrę” oraz „Tak, odgadłeś 5 cyfr.”. Podaj przykładową serię pytań, gwarantująca Lolkowi, że na podstawie odpowiedzi Bolka zawsze wywnioskuje, jaki jest ciąg Bolka, niezależnie jaki ten sekretny ciąg jest. Postaraj się, aby seria pytań była jak najkrótsza. Zakładamy, że Lolek jest z logiką za pan brat i wnioskuje doskonale.