



- Czas na zadawanie pytań: pierwsze 30 minut.
- Rozwiązanie każdego zadania prosimy zapisać w języku polskim, **na innej kartce**.
- Każdą kartkę rozwiązania prosimy **podpisać nazwą drużyny**.
- **Odpowiedź bez uzasadnienia nie jest rozwiązaniem**. Im więcej komentarzy, tym lepiej.
- Za rozwiązanie każdego zadania można otrzymać od 0 do 10 punktów.
- Czas pracy to 120 minut. Powodzenia!

### 1. Cream pies

2019 people are standing in the plane and the distances between all pairs of individuals are distinct (no two alike). Each person is armed with a cream pie that they hurl at their nearest neighbor. Everyone's throw is accurate. Prove that at least one person must be hit at least twice.

### 2. Wyspa potworów

Na pewnej wyspie żyją wyłącznie potwory a jest ich 60. Niektóre potwory mają sługi. Sługa może mieć tylko jednego pana. Pan może też być sługą, przy czym na wyspie obowiązuje prawo „sługa mojego sługi nie jest moim sługą”. Każdy sługa jest mniejszy od swojego pana. Potwór posiadający przynajmniej 3 sługi jest nazywany baronem. Jaka jest największa możliwa liczba baronów na wyspie? Nie zapomnij uzasadnić, że większa być nie może.

### 3. Dzieci na drzewie

Pięcioro dzieci bawiło się na szczycie rozłożystego drzewa, posiadającego 9 konarów, z których każdy był na innej wysokości. Oznaczmy konary przez  $A, B, C, \dots, I$ , co nie oznacza, że w takiej kolejności urosły na drzewie. W pewnym momencie wszystkie dzieci spadły z drzewa (na szczęście obyło się bez obrażeń). Wiadomo, że każde dziecko po drodze otarło się o trzy konary, w takiej kolejności (od góry do dołu):

Paweł:  $A, B, C$

Magda:  $D, E, F$

Donata:  $G, A, C$

Małgosia:  $B, D, H$

Andrzej:  $I, C, E$ .

Ile jest możliwości dla kolejności konarów na drzewie (od góry do dołu), spełniającej powyższe warunki?

### 4. Kasia na turnieju

Kasia gra w 12-osobowym żeńskim turnieju szachowym, w którym każda zawodniczka gra z każdą inną zawodniczką dokładnie jedną partię. Wie o tym Rafał. Po turnieju Kasia powiedziała Rafałowi, ile punktów zdobyła (ale o wynikach innych zawodniczek, ani tym bardziej wynikach partii Rafał nic nie wie). Okazało się, że na tej podstawie Rafał może wywnioskować, że co najwyżej trzy zawodniczki zdobyły więcej punktów niż Kasia. Ile punktów zdobyła Kasia? Podaj wszystkie możliwości. Nie zapomnij uzasadnić, że innych być nie może.

Uwaga: W każdej partii zawodniczka może dostać 1 punkt (za zwycięstwo), albo 0,5 punktu (w przypadku remisu), albo 0 punktów (za przegraną).

Przykład: Gdyby Kasia powiedziała, że zdobyła 11 punktów, to Rafał rzeczywiście wywnioskowałby, że co najwyżej trzy zawodniczki zdobyły więcej punktów niż Kasia. Wywnioskowałby nawet więcej – że Kasia wygrała turniej.

### 5. Ej, koalo!

Na ile sposobów na poniższej planszy można odczytać EJ KOALO zgodnie z regułą, że odczytujemy literę za literą, w każdym kroku przechodząc na literę sąsiednią (w pionie lub poziomie)? Przykładową drogę czytania zaznaczono na szaro na planszy.

```

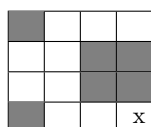
      O
    O L O
  O L A L O
O L A O A L O
O L A O K O A L O
O L A O K J K O A L O
O L A O K J E J K O A L O
O L A O K J K O A L O
O L A O K O A L O
O L A O A L O
  O L A L O
    O L O
      O
  
```

## 6. Skrzynie w magazynie

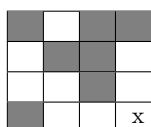
Magazyn ma kwadratową podłogę o boku 12 m, podzieloną na 144 kwadraty o boku 1 m. Na każdym kwadracie, równo w liniach, można ustawić skrzynię będącą sześcianem o boku 1 m. Nie można postawić skrzyni w prawym dolnym rogu, bo tam są jedyne drzwi do magazynu. Do każdej skrzyni musi być dostęp, to znaczy dojście od drzwi do przynajmniej jednego boku skrzyni. Po magazynie poruszamy się, chodząc po kwadratach wolnych od skrzyń, przechodząc z kwadratu do kwadratu sąsiadującego bokiem.

- (a) Ile potrafisz ustawić (zgodnie z powyższymi regułami) skrzyń w magazynie? Im więcej, tym lepiej.
- (b) Jaka jest liczba skrzyń, dla której nie istnieje zgodne z powyższymi regułami ustawienie w magazynie? Im mniejszą liczbę potrafisz znaleźć (i oczywiście uzasadnić), tym lepiej.

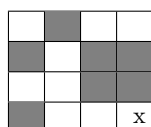
Poniżej na rysunkach pokazano jedno zgodne i dwa niezgodne z regułami ustawienie skrzyń w magazynie o boku 4 m. Krzyżyk wskazuje pole z wejściem.



*dobrze*



*źle*



*źle*

## 7. Gra z jedynką

Na tablicy napisana jest liczba 1000. Bolek i Lolek grają w taką grę: Na zmianę zastępują liczbę na tablicy inną liczbą naturalną (Bolek jako pierwszy), przy czym każda nowa liczba musi być mniejsza od poprzedniej, ale co najmniej tak duża jak połowa poprzedniej. Przegrywa, kto napisze 1. Kto ma strategię wygrywającą?

Strategia wygrywająca to taki sposób gry, że gwarantuje wygraną po wszystkich odpowiedziach przeciwnika, nawet takiego, który nie robi błędów.

## 8. Transmisja

Na rysunku zaznaczono kolorem szarym położenie stacji nadawczo-odbiorczych, działających w sieci pewnej firmy telekomunikacyjnej. Transmisja wiadomości między dwiema stacjami (nadawcą i odbiorcą) jest realizowana w taki sposób, że sygnał od nadawcy jest wysyłany w czterech kierunkach: na północ, na wschód, na południe i na zachód. Każda stacja po odebraniu sygnału, dla którego nie jest docelowym odbiorcą, retransmituje sygnał w czterech kierunkach. Liczba w danym polu oznacza zasięg nadajnika stacji; np. liczba 7 oznacza, że sygnał nadany przez tę stację zostanie odczytany przez wszystkie stacje oddalone o co najwyżej 7 pól w pionie lub poziomie: w sytuacji na rysunku sygnał ze stacji z siódmką dotarłby do czterech stacji (trzech w pionie i jednej w poziomie).

6					5				2
	6						2	①	
	2			4					5
5			4						7
	2	4			2				
6					8				
	③		3				8		4
	6				9				

Załóżmy, że nadawca jest w polu z trójką w kółku, a odbiorca – w polu z jedynką w kółku. Wyznacz przykładową drogę sygnału między nimi, o najmniejszej liczbie stacji pośredniczących w transmisji. Uzasadnij, że mniej stacji pośredniczących być nie może.