



Zadań jest 10. Czas na rozwiązywanie: 90 min. Czas na zadawanie pytań: 15 min.

1. MAM

Na planszy złożonej z 2018 pól w jednym rzędzie. Jacek i Placek grają w następującą grę. Zaczyna Jacek, gracze wykonują ruchy na przemian. Gracz w każdym ruchu wybiera niezajęte jeszcze pole planszy i wpisuje w nie albo M albo A. Wygrywa ten, po którego ruchu na planszy po raz pierwszy pojawi się $\boxed{M} \boxed{A} \boxed{M}$. Jeśli gracze wypełnią wszystkie pola, a MAM nie pojawi się, gra kończy się remisem. Załóżmy, że Jacek i Placek są doskonałymi graczami i nie popełniają błędów. Jakim wynikiem skończy się gra?

2. Mediana

Masz przed sobą 5 kartek, jedna obok drugiej. Na odwrocie każdej z nich zapisana jest inna liczba. Nie znasz tych liczb, a chciałbyś poznać medianę tego ciągu.

Kart nie możesz odkrywać. Na szczęście możesz skorzystać z pomocy wróżki, która zawsze mówi prawdę, ale odpowiada tylko na jeden typ pytań: na odwrocie której z dwóch wskazanych kart jest większa liczba?

Najprostszą metodą znalezienia mediany jest porównywanie kart parami, każda z każdą. W najgorszym przypadku pytań do wróżki będzie wtedy 10.

Zaproponuj lepszą od opisaną wyżej metodę rozwiązania zadania, tzn. taką, która wymaga mniejszej liczby pytań w najgorszym przypadku. Im mniejsza liczba pytań (w najgorszym przypadku), tym lepiej.

Przedstaw analizę swojej metody: zilustruj na przykładzie najgorszy przypadek dla twojej metody oraz uzasadnij, że dla żadnego ciągu większa liczba pytań nie jest potrzebna.

3. Tablica do 81

1	2	3	4	5	6	7	8	9
18	17	16	15	14	13	12	11	10
19	20	21	22	23	24	25	26	27
36	35	34	33	32	31	30	29	28
37	38	39	40	41	42	43	44	45
54	53	52	51	50	49	48	47	46
55	56	57	58	59	60	61	62	63
72	71	70	69	68	67	66	65	64
73	74	75	76	77	78	79	80	81

Liczby od 1 do 81 wpisano do tablicy kwadratowej w przedstawiony obok sposób. Wybieramy dziewięć liczb tak, aby każda z nich była wybrana z innego wiersza i z innej kolumny, to znaczy żadne dwie spośród wybranych nie mogą pochodzić z tego samego wierszu ani z tej samej kolumny. Jaka jest największa możliwa suma wybranych w ten sposób dziewięciu liczb?

4. Utnij, pomnóż, dodaj

Pewien ciąg liczb liczb naturalnych powstał w taki sposób, że każda następna liczba w ciągu powstała z poprzedniej liczby według zasady: odetnij od liczby ostatnią cyfrę i do tej obciętej liczby dodaj odciętą cyfrę pomnożoną przez 5. Na przykład, jeśli pierwszym wyrazem byłoby 112455, to kolejnymi wyrazami ciągu byłyby: 11270, 1127, itd. (Jeżeli jakiś wyraz ciągu byłby jednocyfrowy, to następny wyraz byłby jego pięciokrotnością.) W naszym zadaniu pierwszym wyrazem ciągu jest 112002. Czy jakiś wyraz w tym ciągu występuje nieskończenie wiele razy?

5. Zmutowane mszyce

Jak wiadomo, mszyce potrafią się rozmnażać przez klonowanie, a w dodatku bardzo szybko osiągają zdolność do rozmnażania. W pewnym laboratorium udało się wyhodować zmutowane genetycznie mszyce. Mają one taką własność, że osiągają zdolność do rozmnażania w ciągu jednego dnia. W dodatku codziennie albo wszystkie mszyce w grupie wydają na świat potomka, albo tylko jedna z nich. Załóżmy, że na początku mamy jedną tak zmutowaną mszycę. Wyznacz jak najmniejszą potrafisz liczbę dni, po których w populacji będzie dokładnie 199 mszyc. Im mniejsza liczba dni, tym więcej punktów za rozwiązanie można zdobyć.

6. Konne gonitwy

Adam z powodu choroby nie mógł obserwować wyścigów konnych na żywo. Wiedział tylko, że w gonitwie wzięły udział cztery konie: Księżniczka, Błękitna Strzała, Wschodząca Gwiazda i Błyskawica oraz że każdy koń ukończył wyścig na innym miejscu. Bogdan powiedział mu, że wyścig wygrała klacz Księżniczka, a ogier Błękitna Strzała był drugi. Czesław powiedział, że Księżniczka była druga, a trzecia była klacz Wschodząca Gwiazda. Darek stwierdził, że Wschodząca Gwiazda była czwarta, a drugi był ogier Błyskawica. Edward dodał, zgodnie z prawdą, że każdy z jego poprzedników podał pozycję jednego konia poprawnie, a jednego konia błędnie. W jakiej kolejności konie były na mecie?

7. Prostopadłościany

W trójwymiarowym prostokątnym układzie współrzędnych wybrano 12 płaszczyzny równoległe do płaszczyzny XY , 23 płaszczyzny równoległe do płaszczyzny XZ i 34 równoległych do płaszczyzny YZ . Ile jest prostopadłościanów, których każda ściana zawiera się w jednej ze 69 wybranych płaszczyzn?

8. Liczby w komórkach

W każdą komórkę tablicy 101×101 wpisano liczbę ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$. Jaką największą sumę można było otrzymać, jeśli okazało się, że suma liczb w każdym kwadracie 100×100 wynosiła 1000?

9. DNA

Wiadomo, że nić DNA składa się z czterech rodzajów zasad: A, C, G, T. Załóżmy, że mamy nić DNA złożoną z 84 zasad, w której sekwencja TAGC powtarza się 21 razy, tzn. nić wygląda tak: TAGCTAGCTAGC... Możesz pociąć tę nić na kawałki jak chcesz. Każdy kawałek (czytany od lewej do prawej) stworzy wtedy pewien wyraz, mający sens lub nie. Jaka jest największa liczba różnych wyrazów, jakie możesz uzyskać?

10. Wyspa

Na wyspie Zagadkowej każde miasto ma bezpośrednie połączenie telefoniczne z pozostałymi miastami. Podczas sztormu część linii została uszkodzona. Po sztormie okazało się, że Kaola ma połączenie tylko z trzema miastami, a Pandaluzja – z ośmioma. Pozostałe połączenia pozostały nienaruszone. Ogółem po sztormie nienaruszonych połączeń było 56. Czy na tej podstawie można stwierdzić, ile miast jest na wyspie Zagadkowej?