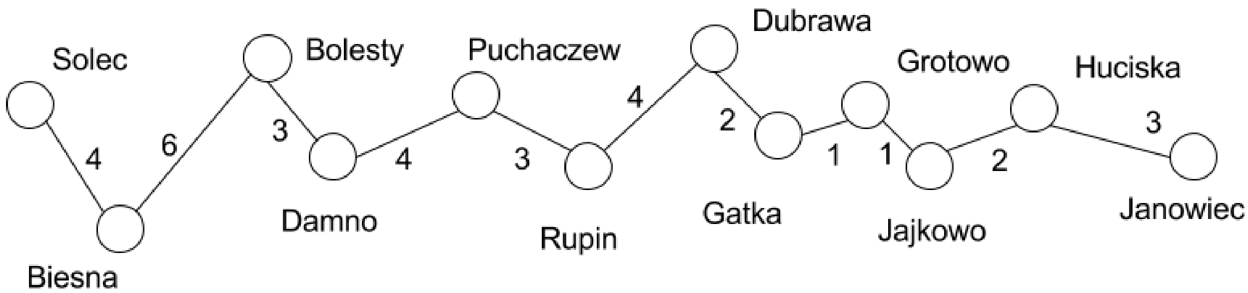
KoALa (KOmbinatoryka-Algorytmika-Logika), Wrocław, 12 VI 2017

V Liceum Ogólnokształcące im. Klaudyny Potockiej w Poznaniu,
Wydział Matematyki i Informatyki UAM w Poznaniu,
Fundacja Matematyków Wrocławskich,
Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego

III MECZ SPARINGOWY WIELKOPOLSKA – DOLNY ŚLĄSK

Zad. 1. ***Nowa szkoła***

Pewną gminę tworzy 12 wsi (jak na rysunku). Sąsiednie wsie są połączone nowoczesną koleją wąskotorową. Władze gminy podjęły decyzję o budowie nowej szkoły podstawowej. Dzieci będą dojeżdżały do szkoły koleją, a gmina będzie płaciła spółce kolejowej za każdy kilometr podróży każdego dziecka. Rysunek przedstawia schemat linii kolejowej z zaznaczonymi odległościami (w km) pomiędzy kolejnymi stacjami.

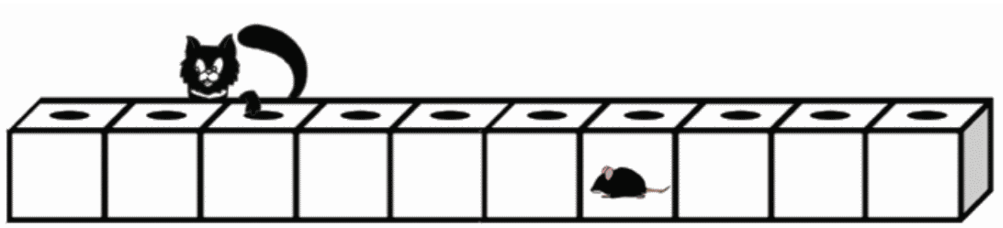


Poniższa tabela zawiera informację o liczbie uczniów z kolejnych wsi.

Sol	Bie	Bol	Dam	Puch	Rup	Dub	Gat	Gro	Jaj	Huc	Jan
9	7	8	21	19	12	24	36	48	52	41	23

W której wsi powinna zostać wybudowana szkoła, jeśli jedynym kryterium wyboru jest łączny koszt transportu dzieci do i ze szkoły?

Zad. 2. ***Kot i mysz***



Kot i mysz bawią się w chowanego. Kot siedzi nad tunelem, w którym schowała się mysz. Tunel składa się z *n* segmentów, a każdy z nich ma otwór, przez który może zajrzeć kot. Kot porusza się swobodnie i może zajrzeć do dowolnego segmentu (tylko jednego naraz) i sprawdzić, czy jest w nim mysz. Po każdej próbie kota mysz może przemieścić się do segmentu sąsiadującego z tym, w którym teraz się znajdowała. Na przykład jeśli mysz była w segmencie nr 2, a kot zajrzał do segmentu nr 5, mysz może przebiec do segmentu 1 lub 3, gdzie cicho czeka na kolejną próbę kota, a jeśli znów będzie nieudana, zmienia ponownie swoje położenie itd. Czy kot ma strategię zapewniającą, że zobaczy kiedyś mysz, niezależnie od segmentu, w którym siedziała na początku? Jeśli tak, to ją podaj.

Zad. 3. ***Gra w różnicę***

Bolek i Lolek grają w prostą grę liczbową. Wykonują ruchy gry na przemian: Bolek wypowiada na głos dowolną cyfrę, a Lolek podstawia ją za jedną z liter w zapisie *abcd – efgh*, która do tej pory nie została zastąpiona cyfrą. Bolek na bieżąco śledzi podstawienia Lolka. Gra kończy się, gdy wszystkie litery są zastąpione cyframi. Celem Bolka jest uzyskanie na końcu gry jak największej wartości wyrażenia, a celem Lolka – jak najmniejszej. Jaką wartością zakończy się gra, jeżeli wiadomo, że żaden z chłopaków nie popełnia błędów?
Uwaga: Zapis typu 4423 – 0045 traktujemy jako różnicę 4423 – 45.

Zad. 4. ***Samolot***

Samolot znajdujący się na wysokości 500 m i lecący z prędkością 200 km/h ma wznieść się na wysokość 1000 m, a jego prędkość ma się zwiększyć do 300 km/h. Proces wznoszenia się podzielono na etapy. Na każdym etapie pilot może podjąć jedną z następujących decyzji:

1) zwiększyć prędkość o 20 km/h,
2) zwiększyć wysokość o 100 m i zwiększyć prędkość o 20 km/h,
3) zwiększyć wysokość o 100 m.

Koszty podjęcia poszczególnych decyzji zależą od wysokości i prędkości.
Koszty decyzji 1) i 2) przedstawia poniższa tabela:

	200 km/h	220 km/h	240 km/h	260 km/h	280 km/h
500 m	1) 9 2) 18	1) 10 2) 18	1) 11 2) 18	1) 12 2) 20	1) 12 2) 21
600 m	1) 11 2) 20	1) 11 2) 20	1) 12 2) 21	1) 12 2) 21	1) 13 2) 22
700 m	1) 12 2) 21	1) 12 2) 21	1) 12 2) 22	1) 13 2) 22	1) 14 2) 23
800 m	1) 13 2) 22	1) 12 2) 22	1) 13 2) 23	1) 14 2) 24	1) 14 2) 25
900 m	1) 13 2) 23	1) 13 2) 23	1) 13 2) 24	1) 14 2) 20	1) 15 2) 26
1000 m	1) 13	1) 13	1) 13	1) 14	1) 14

Koszt decyzji 3) jest niezależny od prędkości i wynosi:

8, gdy samolot jest na wysokości 500 m,

9, gdy samolot jest na wysokości 600 m lub 700 m,

10, gdy samolot jest na wysokości 800 m lub 900 m.

Podaj taki sposób nabierania prędkości i wysokości, aby zminimalizować łączny koszt. Jaki jest ten koszt?

Zad. 5. ***Kapelusze***

W 4 kapeluszach jest po 13 kulek. Możesz w każdym ruchu wybrać z dwóch różnych kapeluszy po jednej kulce i przełożyć je do wybranego z dwóch pozostałych kapeluszy. Czy możesz w jakiejś (dowolnie długiej) serii ruchów sprawić, by wszystkie kulki znalazły się w tym samym kapeluszu?

Zad. 6. ***Szyfr matematyka***

Pewien matematyk zostawił potomnym sejf z dowodem hipotezy Riemanna. Sejf zabezpieczył szyfrem będącym ciągiem pięciu liczb naturalnych. Każda próba otwarcia sejfu siłą lub przy użyciu złego szyfru zakończy się wybuchem sejfu i spaleniem jego zawartości. Oto wskazówki, jakie matematyk zostawił próbującym odgadnąć szyfr:

1) wszystkie wyrazy ciągu są różnymi liczbami dwucyfrowymi;

2) jeśli obliczymy największe wspólne dzielniki kolejnych par sąsiadujących wyrazów ciągu, zaczynając od lewej, otrzymamy czteroelementowy ciąg ściśle rosnący;

3) NWD dowolnych dwóch różnych liczb w ciągu jest mniejszy od 10.

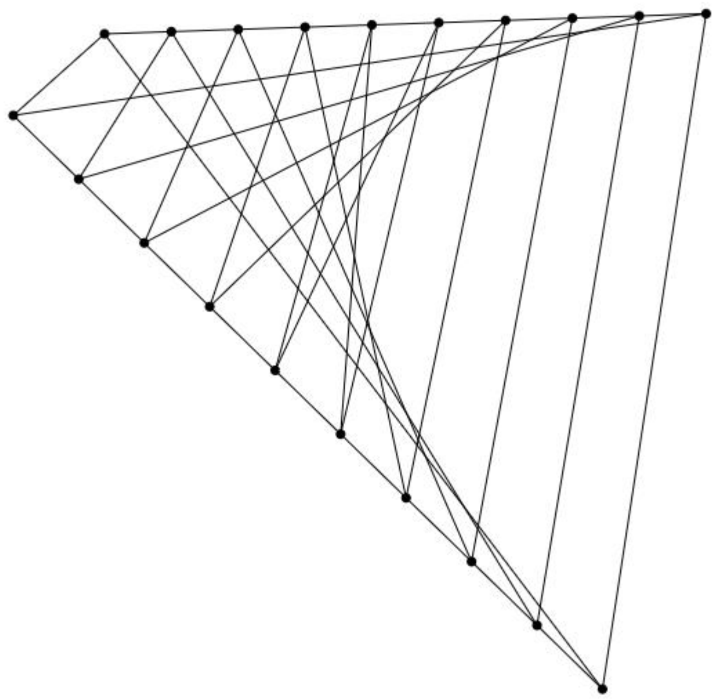
4) wyrazy ciągu należą do sześcioelementowego zbioru liczb naturalnych $\{a, b, c, d, e, f\}$, przy czym:

- $ab = 240$ i $\mathrm{NWW}(a, b) = 60$,
- $cd = 140$ i $\mathrm{NWD}(c, d) = 2$
- $\mathrm{NWW}(e, f) = 35$.

Czy na podstawie powyższych informacji można jednoznacznie odtworzyć szyfr matematyka? Jeśli tak, to wypisz jego wyrazy.

Zad. 7. ***Obwiednia***

Czesio znalazł w pewnej książce ilustrację pojęcia obwiedni dla rodziny prostych. Ilustracja była bardzo podobna do zamieszczonej obok, przy czym na każdym z odcinków bazowych było nie 10, a 12 punktów. Czesio zauważył następującą regułę: n-ty punkt takiego odcinka jest połączony z dwoma punktami drugiego odcinka – odpowiednio n-tym licząc od lewej i n-tym licząc od prawej. Ponadto żadne trzy odcinki nie spotykają się w jednym punkcie. Czesia zainteresowały punkty przecięcia odcinków łączących punkty bazowe. Ile takich punktów (nie licząc samych punktów bazowych) jest na rysunku w książce?



Zad. 8. ***Pomyłka w kodzie***

Przez pomyłkę w wyrazie zapisanym w binarnym kodzie Bacona jedna z liter wypadła:

aaaaaababaabbbaabaaaabbaabaaabaaabbaabaaaaaa

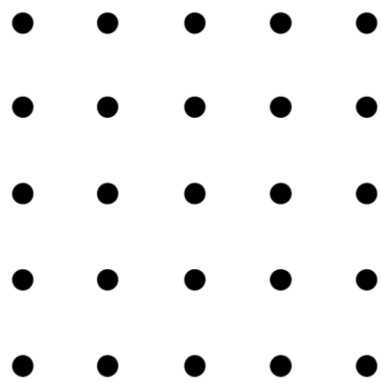
Określ miejsce brakującej litery i zrekonstruuj kod.

Oto tablica kodowa:

A	B	C	D	E	F	G	H	I, J	K	L	M
aaaaa	*aaaab*	*aaaba*	*aaabb*	*aabaa*	*aabab*	*aabba*	*aabbb*	*abaaa*	*abaab*	*ababa*	*ababb*
N	O	P	Q	R	S	T	U, V	W	X	Y	Z
abbaa	*abbab*	*abbba*	*abbbb*	*baaaa*	*baaab*	*baaba*	*baabb*	*babaa*	*babab*	*babba*	*babbb*

Zad. 9. ***Słoneczniki***

Ogrodnik postanowił obsiać kawałek ogrodu słonecznikami. W kwadracie o boku 4 m rozmieścił równomiernie dołki jak na rysunku. Teraz ogrodnik znajduje się w lewym dolnym rogu kwadratu i zamierza do każdego dołka wrzucić nasionko, a następnie wrócić do lewego dolnego rogu. Jaka jest najkrótsza możliwa trasa ogrodnika, dzięki której cel zostanie osiągnięty? Ogrodnik może poruszać się po ogrodzie zupełnie swobodnie.



Zad. 10. ***Gra komputerowa***

Bajtek układa prostą grę komputerową, w której komputer losuje liczbę x ze znanego graczowi zbioru $Z = \{1, 2, ..., n\}$. Zadaniem gracza jest ustalić, jaka to liczba, a odbywać ma się to następująco:

- gracz podaje cztery parami rozłączne podzbiory zbioru Z, przy czym przynajmniej jeden musi być jednoelementowy;
- komputer odpowiada, w którym z tych podzbiorów znajduje się x, lub mówi, że w żadnym (jeśli liczby x nie ma w żadnym z podzbiorów, które podał przed chwilą gracz);
- gracz ponownie wybiera cztery parami rozłączne podzbiory zbioru Z, wśród których co najmniej jeden jest jednoelementowy, itd., dopóki gracz nie przerwie gry, podając wartość x.

Wyznacz wszystkie wartości n, przy których 11 pytań gwarantuje, że sprytny gracz zawsze ustali liczbę x, a 10 pytań takiej gwarancji nie daje (nawet bardzo sprytnemu graczowi).

Przykładowo, gdyby gracz miał pytać o dwa, a nie cztery podzbiory i zbiorem Z byłby zbiór $\{1, 2, 3, 4\}$, to przy pomocy dwóch pytań sprytny gracz odgadnie każdą liczbę x, natomiast jedno pytanie takiej gwarancji nie daje, niezależnie od strategii gracza.