KONKURS MATEMATYCZNO-INFORMATYCZNY KOALA

ZADANIA FINAŁOWE
EDYCJI PONADGIMNAZJALNEJ (2017)

PG1. Koszmarna hodowla

Koszmarny Karolek hoduje bakterie na szachownicy 8 x 8. Najpierw zaraża bakteriami wybrane pola, a potem co minutę zarażane są inne pola w następujący sposób: dla każdego aktualnie zarażonego pola, dla którego nie wszystkie sąsiednie pola są zarażone, Karolek wybiera jedno pole sąsiadujące, które jest zdrowe. Robi to jednocześnie dla wszystkich pól, więc może się zdarzyć, że dla kilku zarażonych pól wybrał to samo sąsiadujące zdrowe pole. Po minucie wybrane pola są zarażane kolonią bakterii. Proces zarażania jest powtarzany tak długo, aż wszystkie pola będą zarażone.

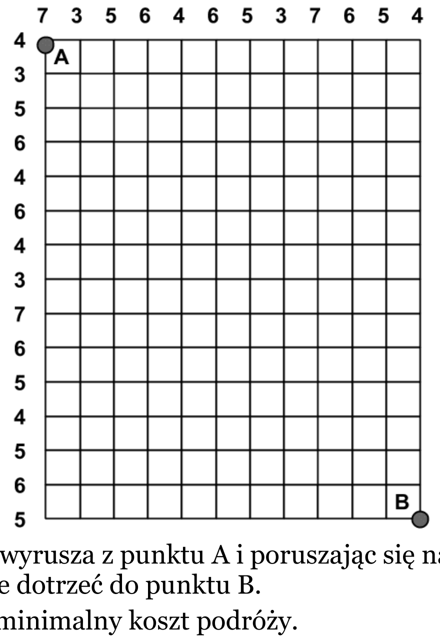
Liczbę n nazywamy groźną jeżeli istnieje taki wybór n początkowych pól zarażonych i taki sposób zarażania, że po 5 minutach lub szybciej cała szachownica będzie zarażona. Na przykład 56 to groźna liczba, bo Karolek może tak wybrać pola początkowe, że już po minucie wszystko jest zarażone.

Wyznacz najmniejszą groźną liczbę.

Uwaga: Pola są sąsiadujące, jeżeli mają wspólny bok. Wspólny wierzchołek nie wystarczy.

PG2. Plan miasta 2

Aby ograniczyć liczbę samochodów poruszających się po ulicach miasta, wprowadzono opłaty dla mieszkańców miasta i okolic. Ich samochody zostały wyposażone w urządzenia rejestrujące drogę pojazdu. Zdecydowano, że koszty przejechania odcinków różnych ulic mogą być różne. Na rysunku przy każdej z 12 ulic pionowych i 15 poziomych podano koszt przejechania jednego odcinka.



Kierowca wyrusza z punktu A i poruszając się najkrótszą drogą chce dotrzeć do punktu B.

Wyznacz minimalny koszt podróży.

Zakładamy, że wszystkie odcinki są dwukierunkowe, a na skrzyżowaniach nie ma zakazów skrętu.

PG3. Cukierki II

Wśród 18 cukierków są landrynki, krówki i mordoklejki (i nie ma innych). Pinokio postanowił rozdzielić wszystkie na kilka niepustych paczek, przy czym w każdej paczce jakieś cukierki muszą być, a każda paczka musi być inna. Oznacza to, ze każde dwie paczki musza różnić się liczbą cukierków przynajmniej jednego rodzaju.

Wiadomo, że landrynek jest nie mniej niż krówek a mordoklejków nie mniej niż landrynek. Ponadto największa liczba paczek, na które Pinokio może rozdzielić cukierki według opisanych zasad, wynosi 7.

Ile może być krówek? Podaj wszystkie możliwości i uzasadnij, że nie ma innych.

PG4. Drużyna z czapkami

Bierzesz udział w teleturnieju. W drużynie masz 5 przyjaciół. Prowadzący teleturniej nakłada każdemu z nich czapkę z pewną dodatnią liczbą narysowanych palców, nie większą niż 10. Liczby mogą się powtarzać. Przyjaciele stoją w kole tak, że każdy widzi liczby na czapkach wszystkich innych, ale nie widzi swojej. Ty widzisz wszystkie czapki. Prowadzący wręcza ci krawat i muszkę. Możesz na oczach wszystkich podejść do dowolnej osoby z drużyny i założyć jej krawat lub muszkę (ale tylko jedno z dwojga i tylko jednej osobie). Nie możesz dawać drużynie innych sygnałów. Teraz prowadzący prosi drużynę, by jednocześnie każdy podniósł ręce i pokazał tyle palców, ile wydaje mu się, że ma na czapce. Za każde prawidłowe wskazanie dostajesz 1000 zł. Jaką największą wygraną potrafisz sobie zagwarantować, niezależnie od tego, jakie czapki nałoży drużynie prowadzący?

Opisz strategię drużyny i przeanalizuj ją.

Zakładamy, że przed nałożeniem czapek możesz się naradzać z drużyną.

PG5. Obraz i czeki II

Ekscentryczny malarz Gaweł chce sprzedać obraz ekscentrycznemu kolekcjonerowi Pawłowi. Umówili się, że sprzedaż będzie wyglądała tak:
– Gaweł na kartce obok obrazu wypisze cztery ceny, czyli dodatnie liczby całkowite, nie większe niż 10 000.
– Paweł ma trzy czyste czeki. Widząc kartkę i wiedząc, że cena obrazu jest wśród podanych czterech, Paweł wpisuje na każdym czeku całkowitą i dodatnią liczbę złotych.
– Teraz Gaweł, widząc kwoty na trzech czekach Pawła, podaje cenę obrazu. Musi to być jedna z czterech kwot z kartki ustawionej przy obrazie.
– Paweł wręcza Gawłowi tyle czeków, by łączna kwota na nich była przynajmniej taka, ile wynosi cena obrazu. Jeśli Paweł nie ma wystarczającej kwoty czekowej, to płaci za karę Gawłowi (gotówką) 10 000 zł.
– I teraz ekstrawagancka reguła: Jeżeli kwota czekowa przewyższa cenę obrazu, Paweł płaci Gawłowi za obraz (gotówką) tyle, ile wynosi różnica między kwotą czekową, a ceną obrazu.

Celem Pawła jest zapłacić w gotówce jak najmniej, przy założeniu, że Gaweł zawsze podaje najgorszą dla Pawła cenę obrazu. Celem Gawła jest dostać w gotówce jak najwięcej, przy założeniu, że Paweł wpisze na czekach najbardziej niekorzystne kwoty dla Gawła.

Jakie kwoty powinien wypisać na kartce Gaweł, by zagwarantować sobie jak największy zysk?

Na przykład, gdyby Gaweł miał do wypisania trzy liczby, a Paweł miał tylko dwa czeki, wypisanie na kartce liczb 1, 3, 4 nie gwarantuje Gawłowi żadnych zysków, bo Paweł wpisze na czekach 1 i 3, dzięki czemu zapłaci dokładnie tyle, ile obraz kosztuje, niezależnie od tego, jaką cenę (1, 3 lub 4) Gaweł poda.

PG6. Złodziej grzybów

Wiewiórka jest bardzo zdenerwowana, ktoś ukradł jej grzyby ususzone na zimę. Cały dzień prowadziła poszukiwania, pytając wszystkie napotkane zwierzęta, czy nie wiedzą, kto mógł je wziąć?

Lis powiedział: – To sprawka tchórza.

Wilk zaprzeczył: – Nie, to nie tchórz.

Zając oświadczył z uśmiechem: – Ja wziąłem.

Borsuk stwierdził ziewając: – Albo zając, albo sroka.

Tchórz burknął: –Wilk kłamie!

Niedźwiedź orzekł krótko: – Zając ukradł.

Dzięcioł się sprzeciwił: – Nie, to nie zając.

Sroka na to: – Nie zając, ale i nie ja.

Jeż potwierdził: – Sroka mówi prawdę, a tchórz też jest niewinny.

Po tych wyjaśnieniach wiewiórce wszystko się kompletnie pomieszało. Poszła więc z tymi odpowiedziami do mądrej sowy. Sowa pomyślała chwilę i odezwała się wesoło: – Już wiem! Z tych dziewięciu odpowiedzi tylko trzy są prawdziwe.

Ale kto ukradł grzyby? Uzasadnij swoją decyzję.

PG7. Komunikacja kosmiczna

W komunikacji z niektórymi sondami kosmicznymi stosowano następujące kodowanie korekcyjne: każdy bit źródłowej wiadomości przesyłany był pięciokrotnie, np. dla wiadomości 1011 wysyłane były cztery paczki: 11111 00000 11111 11111.

Podczas transmisji możliwe były błędy: prawdopodobieństwo zmiany bitu wynosiło 0,05 dla każdego bitu. Podczas odczytu za poprawny bit wiadomości uznawało się ten, który w paczce bitów pojawiał się częściej.

Na przykład: Paczka 10110 traktowana była jako bit 1, a paczka 10000 jako bit 0.

Oblicz prawdopodobieństwo poprawnego odczytania wiadomości, która w wersji źródłowej składała się z 8 bitów. Jakie byłoby prawdopodobieństwo poprawnego odczytu, gdyby nie stosowano kodowania korekcyjnego (tzn. gdyby wysłano tylko 8 bitów wiadomości)?

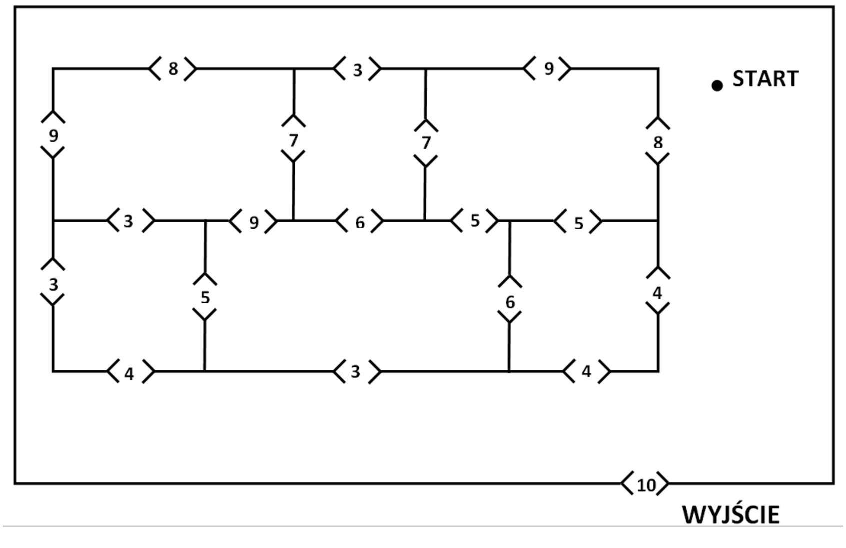
Odpowiedzi podaj z dokładnością do 0,01.

PG8. Labirynt

Rysunek (poniżej) przedstawia plan labiryntu.

Ile najwięcej punktów może otrzymać koala za wyjście z labiryntu, jeśli wiadomo, że za przejście przez każdą z bramek otrzymuje określoną liczbę punktów?

Punkty zawodnik otrzymuje za przejście przez bramkę. Bramka, przez którą zawodnik raz przeszedł, zamyka się i nie jest możliwe przejście przez nią kolejny raz.



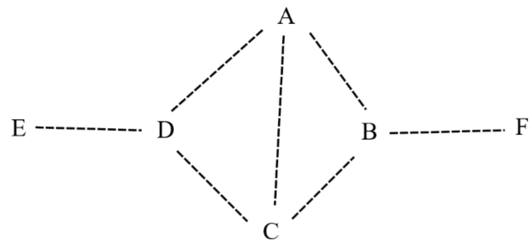
PG9. Pary przyjaciół

W pewnej grupie uczniów niektórzy (być może wszyscy) są przyjaciółmi. Uczniowie postanowili utworzyć drużyny dwuosobowe wg następujących zasad: Każdy może być w najwyżej jednej drużynie. Każda drużyna musi się składać z przyjaciół.

Na początku ktoś wybiera do swojej drużyny jednego ze swoich przyjaciół i tak powstaje drużyna pierwsza. Potem z pozostałych ktoś wybiera jednego ze swoich przyjaciół i tak powstaje drużyna druga. Proces trwa tak długo, aż nie będzie można utworzyć już żadnej nowej drużyny, to znaczy wśród pozostałych osób nie ma pary przyjaciół.

Nas interesuje to, ile drużyn na końcu może być. Stosunek między największą a najmniejszą liczbą drużyn jaka może powstać będziemy nazywać liczbą koali dla danej grupy.

Na przykład dla przedstawionej poniżej grupy uczniów liczbą koali jest 1,5, bo największa możliwa liczba drużyn to 3, a najmniejsza to 2. Linia przerywana oznacza, że ludzie są przyjaciółmi.



Czy potrafisz podać przykład grupy, dla której liczba koali jest większa niż 1,5? Im większa liczba tym lepiej.

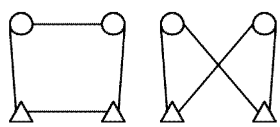
Uwaga: Komplet punktów za rozwiązanie zadania można otrzymać za wskazanie przykładu z największą możliwą liczbą koali i uzasadnienie, że nie ma grupy, dla której liczba koali jest większa.

PG10. Taniec ludowy

W tańcu ludowym tancerze stoją w dwóch rzędach: w jednym rzędzie 6 dziewcząt, w drugim 6 chłopców. Każdy z tancerzy podaje lewą rękę osobie stojącej naprzeciw, lub sąsiadowi z lewej strony, lub osobie stojącej naprzeciw sąsiada z lewej strony. Analogiczna reguła dotyczy prawej ręki.

Wyznacz liczbę możliwych układów rąk.

Przykład. Gdyby w zadaniu była mowa o dwóch parach (dwie dziewczęta i dwóch chłopców), to rozwiązaniem byłyby dwa układy:



Powodzenia☺

V LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCE IM. KLAUDYNY POTOCKIEJ W POZNANIU

UAM

Wydział Matematyki i Informatyki