KONKURS MATEMATYCZNO-INFORMATYCZNY KOALA

ZADANIA FINAŁOWE
EDYCJI GIMNAZJALNEJ (2017)

G1. Sklejanie DNA

Ludzka nić DNA liczy ok. 3mld elementów, czyli cząstek kwasu dezoksyrybonukleinowego. Cząstka może mieć jedną z czterech wartości: G, T, C lub A. Odczytanie tak długiego łańcucha jest bardzo kłopotliwe. Ponieważ łatwo jest odczytać krótkie łańcuchy, więc jedną z metod odcyfrowania DNA jest podzielenie łańcucha, a ściślej wielu kopii tego samego łańcucha w roztworze, na mniejsze odcinki. Podziały dla poszczególnych kopii łańcucha mogą być różne i np. jedna kopia łańcucha ACTACAG może zostać podzielona na odcinki: A, CT, AC, AG, a inna kopia na odcinki: AC, TA, CAG. Wszystkie tak powstałe odcinki współistnieją w tym samym roztworze.

Później wczytuje się wszystkie odcinki do pamięci komputera, który zajmuje się odtworzeniem prawdopodobnego wyglądu wyjściowego łańcucha.

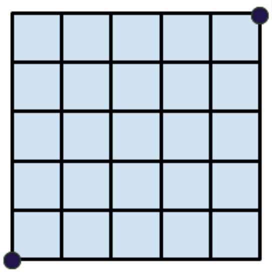
Komputer szuka łańcucha, który zawiera wszystkie odcinki z roztworu, a jednocześnie jego długość jest jak najmniejsza. Na przykład, najkrótszym łańcuchem zawierającym wszystkie odcinki: AC, GTA, CC, TAC jest przykładowo GTACC.

Jaka jest najmniejsza możliwa długość łańcucha, zawierającego wszystkie odcinki: ACTA, CTAT, CGAC, ATACGA, ACGA, TACG, GACTA, TATA?

Prócz znalezienia przykładowego najkrótszego łańcucha należy uzasadnić, że nie ma krótszego.

G2. Kot i mysz

Rysunek ukazuje siatkę, po której błądzić będą kot i mysz. Na początku zwierzęta znajdują się w narożnikach siatki, jak na rysunku.



W każdym ruchu kot wybiera losowo jeden z dwóch kierunków: północ lub wschód, i pokonuje jeden odcinek siatki w tym kierunku. Mysz w tym samym czasie wybiera losowo południe lub zachód i pokonuje jeden odcinek siatki. Zwierzęta wykonują po pięć ruchów.

Wyznacz prawdopodobieństwa spotkania się kota z myszą.

G3. Program kulturalny

Wczoraj wieczorem:

– Andrzej poszedł na koncert.
– Bronek spędził wieczór z Olgą.
– Czesław nie widział Róży.
– Paulina była w kinie,
– Róża natomiast była w teatrze.
– Jedna para była na wystawie.

Do towarzystwa należy jeszcze Darek i Sabina. Każdy chłopak miał wspólny program z którąś z dziewcząt. Kto był z kim i gdzie?

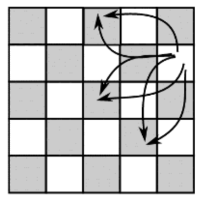
G4. Koń powłóczący nogami

Na tradycyjnie pomalowanej szachownicy 5 x 5 możesz ustawić konia szachowego na dowolnym polu. Pole to zmieni wtedy kolor na przeciwny. Możesz teraz wykonywać ruchy koniem (zgodnie z szachowymi zasadami, czyli po *L*-kach), ale koń powłóczy nogami, to znaczy dotyka pól, przez które przechodzi. Każde dotknięte pole i pole docelowe zmienia kolor na przeciwny. Oznacza to, że w każdym ruchu zmieniane są kolory trzech pól. Koń może wielokrotnie stawać na tym samym polu lub przechodzić przez to samo pole.

Czy można tak ustawić konia i podróżować nim, by początkowe kolorowanie szachownicy zmienić na równie tradycyjne, ale przeciwne?

Jeżeli nie, to uzasadnij dlaczego. Jeżeli tak, to opisz, jak to zrobić (im mniej ruchów tym lepiej).

Na poniższym rysunku przedstawiono wszystkie możliwe ruchy konia stojącego na jednym z brzegowych pól szachownicy.



G5. Gra z batonikiem

Czekoladowy batonik ma wymiary 1 x 11, to znaczy składa się z 11 czekoladowych kostek. Jacek i Agatka chcą zjeść jak najwięcej kostek, ale podział batonika postanowili przeprowadzić za pomocą gry.

Najpierw Jacek łamie batonik na dwie niepuste części (składające się z całkowitej liczby kostek), a potem odkłada mniejszą z nich na bok. Potem pozostałą część batonika łamie Agatka i też odkłada mniejszą część (również złożoną z całkowitej liczby kostek; jeśli obie części są równe, to odkłada na bok dowolną z nich). Ruchy według analogicznych zasad wykonują na zmianę, do momentu gdy pozostanie już tylko jedna kostka batonika. Wtedy zaczyna się etap zjadania.

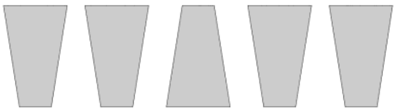
Jeżeli ostatnim łamiącym był Jacek, to pierwsza wybiera Agatka, i na odwrót. Dziecko wybiera ze wszystkich części jedną i ją zjada. Potem drugie dziecko wybiera część i ją zjada. I tak dalej, aż wszystko zostanie zjedzone.

Załóżmy, że dzieci są doskonałymi graczami i w batonikowej grze nie popełniają błędów. Ile kostek zje Agatka?

Przykład: Załóżmy, że batonik składa się z 3 kostek. Jacek odłoży 1 kostkę, Agatka 1 kostkę i z batonika zostaje 1 (nieodłożona) kostka. Teraz zaczyna się zjadanie: wybierać zaczyna Jacek, bo ostatnią łamiącą była Agatka. Jacek zje 1 kostkę, potem Agatka jedną i Jacek ostatnią. W grze z większą liczbą kostek gracze mają oczywiście więcej możliwości łamania, np. dla 1 x 6 w pierwszym ruchu można odłożyć na bok kawałek złożony z 1, 2, lub 3 kostek.

G6. Szklanki

Na stole stoi pięć szklanek. Cztery stoją prawidłowo, a jedna nieprawidłowo (dnem do góry). W każdym ruchu gry wybieramy trzy dowolne szklanki i odwracamy.



Czy wykonując serię takich ruchów można doprowadzić do prawidłowego ustawienia? Jeśli nie, to uzasadnij dlaczego. Jeśli tak, to wyznacz najmniejszą liczbę ruchów prowadzących do prawidłowego ustawienia..

G7. Orzeł-reszka

Bierzesz udział w zabawie w zgadywanie wyników rzutu monetą. Na początku masz 100 zł. Mistrz gry rzuca monetą, której nie widzisz, ale którą widzi twoich czterech doradców. Teraz każdy doradca radzi Ci, co obstawić: orła czy reszkę. Po ich wysłuchaniu możesz postawić dowolną kwotę x (nie musi być całkowita) na orła lub na reszkę (obstawiasz tylko jeden wynik, kwota nie może przekroczyć tego, co aktualnie masz). Jeżeli dobrze obstawisz, twoje konto zwiększa się o x zł; w przeciwnym przypadku tracisz x zł.

Niestety twoi doradcy nie są doskonali: tylko dwóch z nich (nie wiesz którzy) zawsze radzi dobrze, czyli mówi czy wypadł orzeł czy reszka zgodnie z prawdą, natomiast pozostali dwaj radzą jak im się podoba.

Załóżmy, że mistrz gry będzie rzucał monetą trzykrotnie i trzykrotnie będziesz obstawiał wynik rzutu według opisanych zasad.

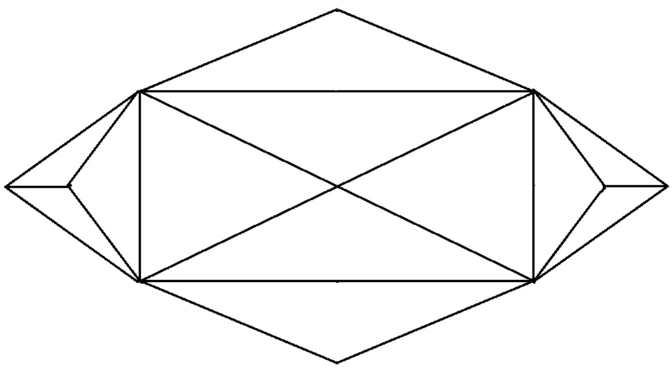
Jaką największą kwotę potrafisz zagwarantować na swoim koncie na końcu gry, nawet gdy wyniki rzutów monetą i rady doradców będą dla ciebie niekorzystne?

Opisz najlepszą pod tym względem strategię i uzasadnij, że lepszej nie ma.

Przykładowo: możesz sobie zagwarantować 100zł, stawiając za każdym razem 0zł na reszkę, ale można lepiej.

G8. Park

Firma PARK zajmuje się sprzątaniem parków miejskich. Urząd miasta zlecił firmie sprzątnięcie parku, którego sieć alejek ilustruje rysunek.



Firma w parku musi poruszać się wyłącznie alejkami, ponadto każda alejka musi być posprzątana, co oznacza, że wzdłuż każdej alejki sprzątający musi się przemieścić przynajmniej raz. Sprzątający musi na końcu powrócić do zaparkowanego auta (oczywiście poruszając się alejkami). Koszt sprzątania jest tym większy, im dłuższa jest długość całkowitej trasy pokonanej przez sprzątającego.

Zaplanuj najmniej kosztowną trasę sprzątającego.

Uzasadnij, że nie ma tańszej. Miejsce zaparkowania auta możesz wybrać sam.

G9. Waga szalkowa

Na wadze szalkowej można wyznaczyć wagę przedmiotu w taki sposób, że na jednej szalce kładziemy ważony przedmiot, następnie na obu szalkach wagi (lub tylko na jednej z nich) kładziemy odważniki, doprowadzając wagę do pozycji równowagi. Chcemy wyznaczać wagi przedmiotów o masie wyrażającej się całkowitą liczbą dekagramów od 1 do 100 włącznie.

Znajdź jak najmniejszą liczbę odważników do tego wystarczającą.

Komplet punktów można dostać za wskazanie najmniejszego możliwego zestawu odważników i uzasadnienie, że mniejsza liczba odważników nie wystarczy.

G10. Lampy w studiu

Szkolne studio telewizyjne próbowano na rozmaite sposoby oświetlić za pomocą specjalnych lamp, dających światło białe. Początkowo umieszczono lampy, zgodnie ze schematem:

```
5 — 4 — 2
|       |
0       4
|       |
4 — 2 — 3
```

Następnie eksperymentowano, zmniejszając i zwiększając liczbę lamp, ale zawsze były w ten sposób rozmieszczone w kątach i na ścianach studio, że wzdłuż każdej ściany było po 9 lamp.

Wyznacz najmniejszą możliwą i największą możliwą liczbę rozmieszczonych lamp, przy zachowaniu zasady, że wzdłuż każdej ściany musi być ich po 9.

Powodzenia☺

Wydział Matematyki i Informatyki

Wydział Informatyki