



Zadań jest 10. Czas na rozwiązywanie: 90 min.

1. Dziurawa szachownica

Z szachownicy 20×20 wycięto dwa różne pola. Kiedy można pozostałe pola tak pokryć 199 kamieniami domina 2×1 , by każdy kamień pokrywał dokładnie dwa pola? Opisz wszystkie przypadki i uzasadnij, że nie ma innych.

2. Zwariowany komputer

Zwariowany komputer wyświetla na ekranie liczbę k , którą uzyskuje, wykonując poniższy ciąg instrukcji:

- zaczyna od $k = 0$;
- dodaje do k dowolnie wiele (być może zero) razy liczbę 10;
- ALBO powiększa k o 1 i kończy działanie, wyświetlając wartość k , ALBO dowolnie wiele razy (być może zero) dodaje do k liczbę 15;
- powiększa k o 4 albo o 2;
- kończy działanie, wypisując wartość k .

Ile jest liczb wśród $1, 2, \dots, 2016$, które mogą zostać wyświetlone?

3. Liczby przy okrągłym stole

Przy okrągłym stole siedzi 2016 zer i 2016 jedynek. Wykonujemy ruchy, polegające na zamianie dwóch liczb miejscami. Podaj minimalną liczbę ruchów, która zawsze wystarczy (niezależnie od początkowego usadzenia zer i jedynek), aby zera i jedynki można było ustawić przy stole na zmianę.

4. Rachunki

Grupa współników: Adam, Barbara, Cezary, Dorota i Ewa wspólnie wyrównują rachunki przelewami, starając się zminimalizować ich liczbę (każdy kosztuje kilka ładnych złotych!). Jakie przelewy powinni wykonać, jeśli:

- Adam jest winien 10000zł Barbarze,
- Barbara jest winna 10000zł Cezaremu,
- Cezary jest winien 5000zł Dorocie,
- Dorota jest winna 8000zł Adamowi i 5000zł Ewie,
- Ewa jest winna 4000zł Adamowi i 3000zł Cezaremu?

5. Truskawkowe pole

Na pewnej plantacji truskawek w Ameryce do zbioru służą roboty dostarczane z Doliny Krzemowej. Wynajęcie takiego robota na dzień to koszt 1000 dolarów, a transport z Doliny Krzemowej kosztuje aż 2000 dolarów. Z powodów zrozumiałych tylko dla księgowych odtransportowanie robota do Doliny nie kosztuje nic. W tej chwili na plantacji jest 10 robotów. Jaki jest najmniejszy możliwy koszt pracy robotów, jeśli w najbliższych 10 kolejnych dniach potrzeba będzie: 6, 2, 4, 2, 4, 5, 3, 2, 3, 4 robotów?

Przykładowo, gdyby truskawkowe żniwa miały potrwać tylko cztery dni i w kolejnych dniach potrzebne byłoby 9, 7, 7 i 9 robotów, to po odesłaniu jednego robota i zostawieniu pozostałych na wszystkie dni, plantatorzy zapłaciliby 4×9000 dolarów. Z kolei gdyby pierwszego dnia odesłano jednego robota, drugiego dnia odesłano kolejne dwa, a na ostatni dzień zamówiono dodatkowe dwa roboty, trzeba by było zapłacić $9000 + 7000 \cdot 2 + 9000 + 2000 \cdot 2$ dolarów.

6. Spadek

Ekscentryczny wujek zostawił Ci w spadku 50mln złotych na koncie notariusza. Jednak zastrzegł w testamencie, że część z tej kwoty musisz przekazać na rzecz kancelarii prawniczej. Wysokość datku zależy od tego, jak wykonasz zadanie przygotowane dla Ciebie przez wujka. Wujek skonstruował maszynę, która na wyświetlaczu pokazuje zawsze 4 cyfry. Maszyna ma guziki A, B, C, D oraz G.

- Jeżeli naciśniesz A, pierwsza cyfra na wyświetlaczu zmniejsza się o 1, z wyjątkiem przypadku, gdy jest to 0: wtedy zmienia się na 9.
- Klawisze B, C, D działają podobnie, tylko zmieniają odpowiednio drugą, trzecią i czwartą cyfrę na wyświetlaczu.
- Klawisz G sprawia, że wszystkie cyfry jednocześnie rosną o 1, przy czym 9 zmienia się na 0.

Na przykład naciśnięcie G zmieniłoby 2909 na 3010, a naciśnięcie C zmieniłoby 2909 na 2999.

Twoim zadaniem jest, zaczynając od 4444 na wyświetlaczu, otrzymać 1567. Po każdym wciśnięciu przez Ciebie jednego z klawiszy A,B,C,D notariusz od razu przeleje z konta spadkowego 1mln na rzecz kancelarii. Po każdym Twoim użyciu klawisza G notariusz przeleje na konto kancelarii 2mln. Jaka jest największa kwota, jaka może Ci zostać na koncie po wykonaniu zadania?

7. Kółko taneczne

Na pierwsze zajęcia kółka tanecznego przyszło 14 uczniów. Na następnych zajęciach (kółka odbywają się co tydzień) liczba uczestników podwoiła się. W kolejnych tygodniach historia rozwijała się tak:

1. Z kółka zrezygnowały niektóre osoby, a ich liczba była większa niż 80% liczby uczestników z zajęć sprzed dwóch tygodni.
2. Jeżeli powyższa liczba rezygnujących przekroczyła liczbę uczestników sprzed tygodnia, to kółko zostało zlikwidowane, w przeciwnym razie ogłaszano, że kółko trwa.
3. Każdy z uczestników sprzed tygodnia, który nie zrezygnował, przeprowadzał w bieżącym tygodniu nowego uczestnika kółka.

Powyższe reguły były zachowane tak długo, dopóki kółko przestało działać z powodu 2. Czy po roku od pierwszych zajęć kółko dalej działało?

8. Robaczywe jabłka

Masz 14 identycznie wyglądających jabłek. 7 z nich jest zdrowych, a 7 robaczywych. Wszystkie zdrowe ważą tyle samo, podobnie wszystkie robaczywe ważą tyle samo, ale nieco mniej niż zdrowe. O tym wszystkim wiesz zarówno ty jak i twój niezwykle inteligentny przyjaciel. Dodatkowo wiesz, które są zdrowe, a które robaczywe, ale twój przyjaciel tego nie wie. Nie możesz nic przyjacielowi mówić, możesz jedynie na jego oczach ważyć jabłka za pomocą wagi szalkowej (bez odważników). Chcesz dostarczyć przyjacielowi tylu informacji, by mógł wywnioskować, które jabłka są robaczywe. Za pomocą ilu waseń potrafisz to zrobić? Im mniej waseń, tym lepiej.

9. Lista kontaktów

W jednej z wielkopolskich szkół funkcjonował na początku lat 90. następujący system przekazywania uczniom informacji, używany w szczególnych okolicznościach: Najpierw wychowawca przekazywał informację telefonicznie pewnym ustalonym wychowankom. Następnie każdy z powiadomionych przekazywał informację (np. telefonicznie) ustalonej wcześniej koleżance lub koledze, ci z kolei przekazywali innym, itd. Pewnego razu okazało się, że informacja dyrekcji szkoły nie dotarła do wszystkich uczniów pewnej klasy, mimo że każda z powiadomionych osób skontaktowała się z koleżanką lub kolegą z ustalonej listy. Wychowawca zebrał od uczniów posiadane przez nich informacje na temat listy kontaktów i przygotował na ich podstawie poniższą tabelę kontaktów.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1					x					x			x
2			x	x									
3						x			x				
4											x		
5												x	
6							x	x					
7													
8													
9		x											
10	x												
11													
12													
13													

Dla przykładu: x na przecięciu kolumny 9 i wiersza 3 oznacza, że uczeń z numerem 9 w dzienniku lekcyjnym powinien przekazać informację uczennicy, która w dzienniku ma numer 3.

Wyznacz największą możliwą liczbę uczniów, do których mogła dotrzeć informacja dyrekcji, jeśli wiadomo, że wychowawca przekazał tę informację dokładnie dwom osobom w klasie.

10. Szkatułki

W każdej z 30 zamkniętych na klucz szkatulek jest po jednym cennym kamieniu: jest tam albo perła, albo diament, albo szmaragd. Nie wiadomo, w której jest jaki kamień, nie wiadomo też, ile szkatulek zawiera diamenty, ile szmaragdy, a ile perły. Dostałeś od wiedźmy – właścicielki skarbu – 10 kluczy perłowych, 10 kluczy diamentowych i 10 kluczy szmaragdowych. Każdy klucz można włożyć do zamka każdej szkatułki, ale otworzyć można nim tylko szkatułki z kamieniem, z jakiego zrobiony jest klucz.

Teraz masz szansę na zdobycie skarbu: na rozkaz czarownicy wkładasz po jednym kluczu do każdego zamka (ale żadnej szkatułki nie wolno Ci próbować otwierać). Wiedźma sprawdza (w tajemnicy przed Tobą), ile kluczy jest we właściwych zamkach. Jeśli jest ich przynajmniej 10, możesz w nagrodę zabrać wszystkie szkatułki; w przeciwnym przypadku wiedźma oznajmia, że próba jest nieudana. Po nieudanej próbie możesz spróbować jeszcze raz: wyciągasz wszystkie klucze i ponownie (po zastanowieniu) wkładasz po jednym kluczu do zamków. Zabawa trwa, dopóki nie zdobędziesz skarbu. Wymyśl plan działania, dzięki któremu liczba prób gwarantująca zdobycie skarbu niezależnie od rozmieszczenia kamieni w szkatułkach będzie jak najmniejsza. „Jak najmniejsza” oznacza tu „najmniejsza, dla jakiej potrafisz uzasadnić, że na pewno zdobędziesz skarb”. Im mniejsza liczba prób, tym lepiej.