KONKURS MATEMATYCZNO-INFORMATYCZNY KOALA

ORGANIZOWANY PRZEZ
V LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCE
IM. KLAUDYNY POTOCKIEJ W POZNANIU
WE WSPÓŁPRACY
Z UNIWERSYTETEM IM. ADAMA MICKIEWICZA
I POLITECHNIKĄ POZNAŃSKĄ

ZADANIA DRUGIEGO ETAPU (edycja 2016)

Instrukcja

1. Rozwiązanie każdego zadania prosimy zapisać na **innej** kartce, opisanej nazwą drużyny.
Za rozwiązanie (**z uzasadnieniem**) każdego zadania można otrzymać od 0 do 10 punktów.
2. Rozwiązania wszystkich zadań należy zapisać w języku polskim.
3. Po zakończeniu wszystkie kartki z rozwiązaniami prosimy umieścić w kopercie i zakleić ją.
4. Czas pracy to **150 minut**. Powodzenia!

---

1. Messages From Space

Messages sent to Earth from a spacecraft consist of the digits 1,...,9. Some of the digits may be lost in transmission. To combat this, extra (redundant) information is sent so that the message can be reconstructed. In one scheme (algorithm), d–1 zeros (`0`) are inserted after each digit d. For instance, the message `42312` would be sent as `400020300120`.

A message sent from the spacecraft was received as `0040300102400`.
What is the fewest number of digits (0, ..., 9) that could have been lost?

2. Zebry

Zebry występują w wielu podgatunkach – są na przykład takie, które mają paskowane tylko nogi. U jednego z nich zaobserwowano, że paski tworzą regularną strukturę (rodzaj naturalnego kodu paskowego podgatunku), odstraszającą owady, którą w uproszczeniu można scharakteryzować tak:

- pierwszy pasek nad kopytem jest zawsze czarny,
- ostatni pasek też jest zawsze czarny,
- pasek (również pierwszy i ostatni) może mieć

pojedynczą lub podwójną szerokość (4 cm lub 8 cm).

Ile jest niepowtarzalnych układów pasków, jeśli przyjąć, że paski pokrywają 52 cm nogi zebry?

3. Szyba

W autobusie, którym jechało 7 pasażerów, wyleciała szyba, wybita przez jednego z nich.

Oto, co o tym incydencie mówią pasażerowie:

Abacki: – Widziałem, że to Fabacki wybił szybę.

Babacki: – Ależ skąd! To zrobił Dabacki albo Gabacki.

Cabacki: – Przyznaję się – to ja.

Dabacki: – To nie ja.

Ebacki: – Cabacki kłamie, to ja wybiłem szybę.

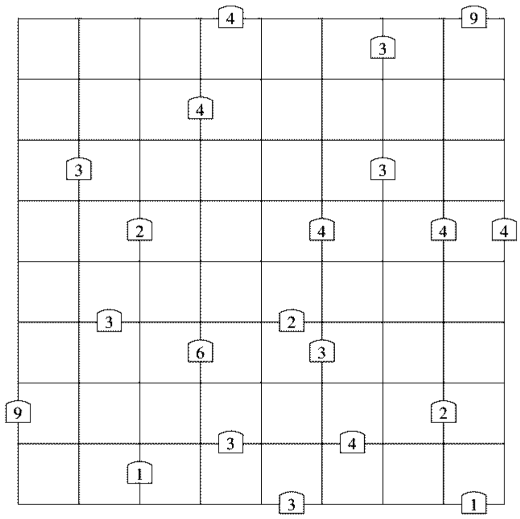
Fabacki: – Szybę wybił jeden z pasażerów z walizką, a więc albo Abacki, albo Babacki.

Gabacki: – Co za ludzie! Tylko dwaj mówią prawdę. To znaczy ja, oczywiście, i jeszcze tylko jeden z nich.

Udało się ustalić, że Gabacki mówi prawdę.
Który z pasażerów wybił szybę?

4. Robot

Poniższy rysunek ukazuje planszę składająca się z kwadratowych pól, używaną w konkursie robotyki. Przy wybranych krawędziach zaznaczono informację o liczbie punktów, jakie należy dopisać na konto drużyny, jeśli jej robot przejdzie wzdłuż konkretnej krawędzi.



Zakładamy, że robot rozpocznie wędrówkę od pola w lewym górnym narożniku siatki i dotrze do pola w prawym dolnym narożniku siatki. W każdym kroku robot przejdzie wzdłuż krawędzi jednego pola siatki, kierując się przy tym albo w dół, albo w prawo.

Jaką największą liczbę punktów może zdobyć drużyna? Jeśli optymalnych dróg jest więcej niż jedna, to przedstaw na rysunku przykładową drogę.

5. Kasa

W kasie jest 120 banknotów 20-złotowych, 120 banknotów 50-złotowych i pewna liczba banknotów 100-złotowych.

Mówimy, że kwota x jest możliwa do wypłacenia, jeżeli x jest liczbą dodatnią i można wypłacić x zł za pomocą banknotów znajdujących się w kasie.

Na przykład, gdyby w kasie był tylko jeden banknot 20-złotowy i dwa 50-złotowe, to kwotami możliwymi do wypłacenia byłyby: 20 zł, 50 zł, 70 zł, 100 zł, 120 zł.

Uzasadnij, że liczba różnych kwot możliwych do wypłacenia jest parzysta.

6. Literaki

W emitowanym co tydzień teleturnieju pt. Literaki występują małżeństwa. W każdym odcinku programu spotykają się dwa małżeństwa. Aby było ciekawiej, żony tworzą jedną drużynę i grają przeciwko mężom.

W eliminacjach do teleturnieju wyłoniono 20 małżeństw. To nie oznacza, że wszyscy w programie wystąpią. Wiadomo jednak, że żadne małżeństwo nie może wystąpić dwa razy. Po eliminacjach każda osoba ma swój literakowy ranking: im wyższy (opisany większą liczbą), tym jest lepszym literakowym graczem. Ranking jest znany tylko organizatorom.

By wyrównać szanse zawodników występujących w każdym odcinku teleturnieju muszą wystąpić takie dwa małżeństwa, że suma wartości punktów rankingowych obu żon jest równa sumie wartości punktów rankingowych mężów.

Oto tabela z punktami rankingowymi kandydatów do teleturnieju (każdemu małżeństwu odpowiada jedna kolumna):

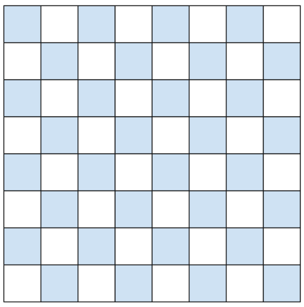
żona	5	6	1	3	2	2	3	7	8	7	8	1	5	1	6	1	4	8	3	4
mąż	9	1	4	9	7	3	2	7	4	10	2	8	8	6	8	1	3	6	5	2

Organizatorzy teleturnieju ułożyli plan spotkań tak, by teleturniej był emitowany jak najdłużej.

Ile tygodni potrwa emisja?

7. Szachownica

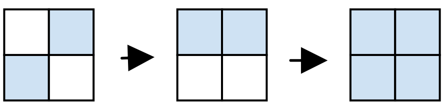
Jakub wśród gier na swym tablecie odnalazł grę logiczną pt. Szachownica. Grający miał za zadanie w najmniejszej liczbie ruchów szachownicę biało-niebieską uczynić jednolicie niebieską.



Ruch w tej grze oznaczał zamianę kolorów (inwersję) wszystkich pól wskazanego wiersza lub kolumny. Gra składała się z wielu poziomów. Szachownica zawsze miała parzystą liczbę wierszy i kolumn. Poziom 1. to szachownica 2 × 2. Kolejne poziomy gry to szachownice 4 × 4, 6 × 6, 8 × 8 itd.

Chłopak dość szybko wymyślił algorytm, który dla szachownicy o rozmiarach $2k \times 2k$ (k jest dowolną liczbą naturalną), pozwalał na jej transformację dokładnie w $2k$ krokach.

Przykład: Dla szachownicy 2 × 2 wystarczą dwa ruchy: 1. wskazanie pierwszej kolumny i 2. drugiego wiersza:



Jakub chciał się upewnić, że jego algorytm jest optymalny. Nie potrafił jednak tego zrobić.

Zaprojektuj algorytm dla tej gry, dokonujący transformacji szachownicy dokładnie w $n = 2k$ krokach (k jest dowolną liczbą naturalną), gdzie n jest liczbą wierszy (i kolumn) szachownicy.

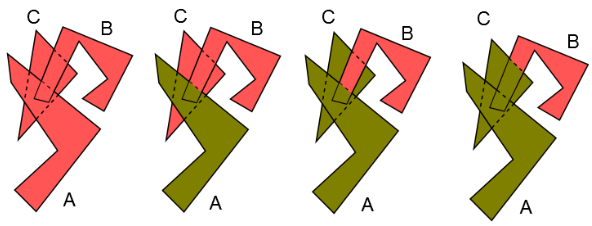
Uzasadnij, że nie istnieje algorytm, który rozwiązywałby zadanie w liczbie kroków mniejszej niż n.

8. Gra w wielokąty

Jacek i Agatka grają w następującą grę.
Na początku Agatka rysuje na tablicy trzy wielokąty (niekoniecznie wypukłe i niekoniecznie rozłączne) i zamalowuje wnętrza wszystkich trzech wielokątów czerwoną kredą.
W ten sposób na tablicy powstaje czerwona figura F, będąca sumą trzech zamalowanych na czerwono obszarów.
Zakładamy, że Agatka musi tak narysować wielokąty, by figura F miała pole równe 1.
Teraz Jacek wybiera jeden z trzech wielokątów Agatki i przemalowuje na zielono albo tę część figury F, która leży na zewnątrz tego wielokąta, albo tę część F, która leży wewnątrz wielokąta.
Następnie Agatka wybiera jeden z dwóch pozostałych wielokątów i przemalowuje na zielono albo tę część figury F, która jest na zewnątrz wybranego wielokąta, albo tę część F, która jest w jego wnętrzu.
Na koniec Jacek przemalowuje na zielono albo część F znajdującą się wewnątrz ostatniego z trzech wielokątów, albo część F będącą na zewnątrz tego wielokąta.
Agatka chciałaby, by pozostała na tablicy czerwona część figury F miała jak największe pole, a Jacek wręcz przeciwnie – stara się, by miała pole jak najmniejsze.

Uzasadnij, że Agatka może tak narysować wielokąty i tak grać, że pole czerwonej figury na końcu gry zawsze będzie wynosiło co najmniej 1/6, choćby Jacek robił wszystko, by jej w tym przeszkodzić.

Oto przykładowy przebieg rozgrywki, ilustrujący zasady przemalowywania figury (w tym przykładzie ruchy graczy są przypadkowe, niekoniecznie optymalne):



Agatka narysowała wielokąty A, B, C. Jacek wybrał A i przemalował jego wnętrze. Potem Agatka wybrała B i przemalowała to co znajduje się na zewnątrz B (a dokładniej rzecz ujmując, to co jeszcze nie zostało tam przemalowane). Na koniec Jacek, któremu pozostał wielokąt C, zdecydował się przemalować wszystko wewnątrz C.

Zestawy zadań możecie zabrać do domu ☺
Dziękujemy za udział w konkursie!