KOMBINATORYKA
ALGORYTMIKA
LOGIK**A**

DRUŻYNOWY KONKURS ORGANIZOWANY PRZEZ V LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCE IM. KLAUDYNY POTOCKIEJ W POZNANIU ORAZ WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI UNIWERSYTETU IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

Poniżej znajduje się 10 zadań finałowych. Czas na przygotowanie rozwiązań to 90 minut.
Prosimy zapoznać się z regulaminem. Powodzenia!

PG1. Ucieczka

Dziesięciu więźniów z dziesięciu sąsiednich cel planowało ucieczkę. Podczas jedynego w kwartale meczu siatkówki do każdego z więźniów miała trafić koperta z fałszywym dokumentem tożsamości, właściwym dla konkretnego więźnia. Po powrocie do cel okazało się, że koperty miały pomylone oznaczenia. Okazało się, że dokumenty zamiast w kolejności ABCDEFGHIJ (gdzie litery to oznaczenia cel) zostały jednak rozdane w kolejności DHAEFIJGBC. Więźniowie z dwóch sąsiednich cel mają możliwość przy zachowaniu najwyższej ostrożności, zamiany kopertami (jedna koperta za jedną kopertę).

Uzasadnij, że 15 zamian nie wystarczy na to, by koperty trafiły do właściwych więźniów.
Ile co najmniej zamian musi być wykonanych, aby koperty trafiły do właściwych więźniów? Uzasadnij, ze mniejsza liczba zamian nie wystarczy.

Przykład: Dla czterech cel ABCD do poprawnego rozmieszczenia kopert rozdanych w kolejności CDBA potrzeba pięć zamian.

PG2. Mecz piłkarski

W finale pewnego turnieju piłki nożnej padł wynik 7 : 4. Na ile różnych sposobów mógł zmieniać się wynik w trakcie meczu? Odpowiedź uzasadnij.

Przykład.
Do wyniku 2 : 1 prowadzą trzy sposoby:
I. 0 : 1 -> 1 : 1 -> 2 : 1
II. 1 : 0 -> 1 : 1 -> 2 : 1
III. 1 : 0 -> 2 : 0 -> 2 : 1

PG3. Dyplomaci

Jesteś doradcą ministra spraw zagranicznych i organizujesz spotkanie z dużą liczbą dyplomatów. Każdy z nich ma dobre relacje z większością pozostałych, ale nie ze wszystkimi – masz szczegółową wiedzę, z której wynika, że każdy z nich ma co najwyżej trzech wrogów.

Zaproponuj metodę podziału dyplomatów na dwie grupy (celem zorganizowania dwóch spotkań ministra z grupami dyplomatów) w taki sposób, aby każdy miał w grupie co najwyżej jednego wroga.

Uzasadnij poprawność Twojego algorytmu.

PG4. Kule w pudełku

W pudełku jest 28 kul w pięciu kolorach. Najwięcej jest kul czarnych. Okazuje się, że liczba wyciągniętych kul, która jest potrzebna i wystarczająca do tego, by wśród nich znalazły się przynajmniej dwie kule jednego koloru i przynajmniej jedna kula innego koloru, to 9.

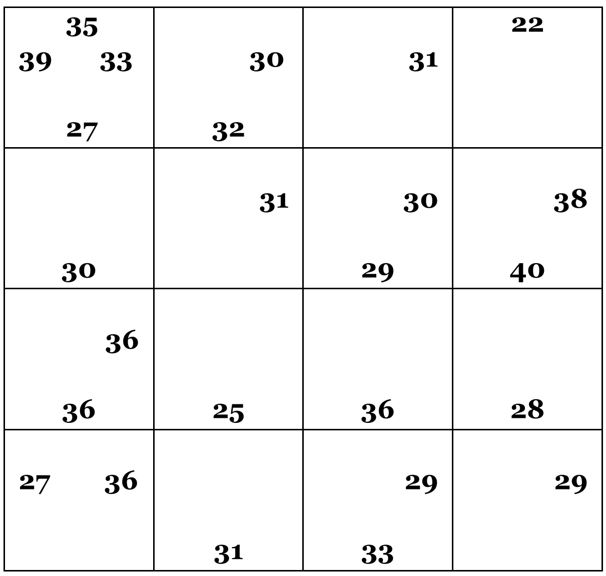
Ile przynajmniej kul trzeba wyciągnąć, aby mieć pewność, że wśród nich znajdzie się przynajmniej jedna kula czarna? Uzasadnij, że mniejsza liczba wyciągniętych kul nie wystarczy.

PG5. Mosty

Poniższy rysunek przedstawia uproszczony schemat sieci dróg pewnego regionu, przez który przepływa wiele rzek. O fakcie istnienia mostu na danym odcinku drogi informuje liczba, która określa nośność mostu, czyli maksymalny tonaż pojazdu, jaki może przejeżdżać przez most.

Określ maksymalny tonaż samochodu, który wyruszając z miejsca, znajdującego się w lewym górnym rogu, dotrze do miejsca w dolnym prawym rogu. Udowodnij, że większy tonaż być nie może.

Wyznacz najkrótszą możliwą trasę przejazdu dla takiego pojazdu. Udowodnij, ze krótszej nie ma.



Zakładamy, że: 1. wszystkie odcinki dróg są jednakowej długości; 2. wszystkie odcinki dróg są dwukierunkowe; 3. na skrzyżowaniach nie ma żadnych zakazów skrętu; 4.drogami bez mostu może poruszać się samochód nawet o tonażu 50.

PG6. Lekcja algorytmiki

Nauczyciel na początku kolejnej lekcji o algorytmach przeszukiwania zbiorów uporządkowanych zaproponował uczniom następujące zadanie na najbliższe 45 minut:

– Wybrałem jedną z liczb naturalnych między 1 a 100. Waszym zadaniem jest znaleźć liczbę, o której pomyślałem. Każda i każdy z Was będzie po kolei wypowiadać głośno liczbę. Po każdej wypowiedzi będę mówić: „Za mało!”, „Za dużo!” lub „Sukces!”. Jest tylko jedno ograniczenie: wolno Wam zadać co najwyżej jedno pytanie, na które odpowiem „Za dużo!”. Jeśli będę musiał powiedzieć „Za dużo!” po raz drugi – przegraliście. Teraz macie 30 minut na opracowanie strategii. Każdy będzie mógł wypowiedzieć tylko jedną liczbę.

Rozstrzygnij, czy istnieje taka strategia zadawania pytań, aby grupa 14 uczniów miała szansę znaleźć liczbę, niezależnie od tego, jaką liczbę nauczyciel wybrał. Odpowiedź uzasadnij.

PG7. Równania prostych

Ania, Beata i Celina patrzą na tablicę, na której są narysowane cztery różne proste i są zapisane ich równania. Oto, co dziewczyny powiedziały na temat prostych:
Ania: – Punktów przecięć jest sześć, a przynajmniej trzy proste przecinają się w jednym punkcie.

Beata: – Punktów przecięć jest trzy, a przynajmniej trzy proste są wzajemnie równoległe.

Celina: – Każda prosta przecina się z każdą, a przynajmniej dwie proste są równoległe.

Wiadomo, ze w przypadku każdej z dziewcząt tylko jedna z dwóch podanych przez nią informacji jest prawdziwa.

Na tej podstawie opisz wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie. Podaj wszystkie możliwości i uzasadnij, że nie ma innych.

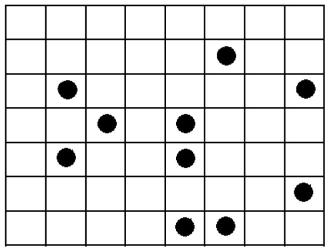
PG8. Zagadka z liczbą 2015

Na warsztatach naukowych podsumowujących konkurs KOALA uczestnicy napisali program, który najpierw generował i wyświetlał na ekranie listę 2015 kolejnych liczb naturalnych: 1, 2, 3, ..., 2014, 2015. Następnie tak długo, jak to było możliwe, program powtarzał następującą procedurę: dwie przypadkowo wybrane liczby z listy usuwał, a do listy dołączał na końcu nową liczbę równą różnicy wylosowanych liczb (zawsze odejmujemy mniejszą od większej).

Rozstrzygnij, czy jest możliwe, aby na końcu jedyną liczbą wyświetloną na ekranie było 3? Odpowiedź uzasadnij.

PG9. Turniej robotów

Poniższy rysunek ukazuje siatkę kwadratowych pól o boku 1 metra, używaną w konkursie dla szkolnych kół robotyki.

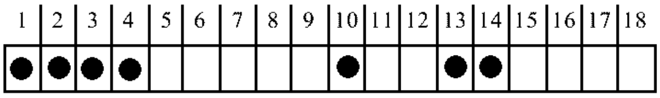


Drużyna ma do dyspozycji pięć robotów. Zadaniem jest zaprogramować roboty tak, aby przez każde z pól oznaczonych na siatce czarnym kołem przeszedł co najmniej jeden robot. Liczba użytych robotów powinna być jak najmniejsza. Zakładamy, że każdy robot rozpocznie wędrówkę od pola w lewym górnym narożniku siatki i dotrze do pola w prawym dolnym narożniku siatki. Po drodze może się poruszać tylko w dół i w prawo.

Ile co najmniej robotów należy zaprogramować? Uzasadnij, że mniej być ich nie może.

PG10. Remont w muzeum

Dyrekcja muzeum postanowiła przeprowadzić remont siedmiu sal, będących w najgorszym stanie, spośród 18 znajdujących się na parterze. Sale przeznaczone do remontu zaznaczone są na czarno.



Postanowiono, że wszystkie eksponaty zostaną przeniesione do jednej z sal na parterze (niewykluczone, że do jednej z sal, które przeznaczone są do remontu), która będzie pełnić rolę tymczasowego magazynu.

Do której sali należy przenieść eksponaty, jeśli średnia odległość tymczasowego magazynu od sal przeznaczonych do remontu powinna być najmniejsza z możliwych? Odpowiedź uzasadnij.

Zakładamy, że: 1. odległości między sąsiednimi salami są równe; 2. za średnią odległość należy uznać średnią arytmetyczną odległości magazynu od sal przeznaczonych do remontu.