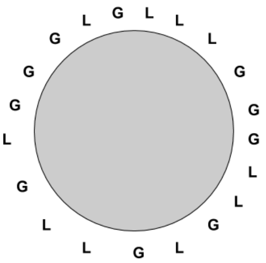
KOmbinatoryka. ALgorytmika. LogikA

Drużynowy konkurs organizowany
przez V Liceum Ogólnokształcące
im. Klaudyny Potockiej w Poznaniu

Poniżej znajduje się 10 zadań finałowych.
Prosimy o zapoznanie się z regulaminem. Powodzenia!

G1. Okrągły stół

Kapitanowie 10 drużyn gimnazjalnych i 10 drużyn licealnych, zakwalifikowanych do drugiego etapu konkursu KOALA w roku 2016, spotkali się przy okrągłych stole. Siadali w dowolnej kolejności na krzesłach ustawionych wokół stołu.



Ilu kapitanów musi wstać i zmienić miejsce, aby przedstawiciele różnych typów szkół siedzieli na przemian, tzn. G L G L itd.? Liczba zmieniających miejsce powinna być jak najmniejsza. Odpowiedź uzasadnij.

Uwaga: Przyjmujemy, że krzesła są nieruchome, tzn. nie wolno przenosić krzesła, aby umieścić je między innymi.

G2. Sortowanie po trzy (II)

Na stole leżą obok siebie karty. Każda z nich oznaczona jest literą A, B lub C. Chcemy posortować je alfabetycznie (tak, aby litery A były po lewej stronie, litery B w środku i C po prawej stronie), przy czym pojedynczy ruch polega na odwróceniu kolejności trzech kolejnych kart: np. układ B C A A możesz zastąpić układem A C B A lub B A A C.

Wykaż, że ciąg C B C B B A B A A C A C da się tą metodą posortować i wyznacz najmniejszą liczbę ruchów potrzebnych do posortowania tego ciągu.

G3. Agenci wywiadu (II)

12 tajnych agentów wywiadu, przebywających na terenie różnych państw, ma obowiązek codziennie wymieniać się nowo zdobytymi informacjami. Ze względów bezpieczeństwa komunikacja odbywa się z użyciem telefonów stacjonarnych.

Wyznacz jak najmniejszą liczbę rozmów telefonicznych, która wystarczy do tego, aby każdy z agentów poznał wszystkie informacje. Odpowiedź uzasadnij.

Zakładamy, że w czasie jednej rozmowy dwóch agentów wymienia się wiedzą zdobytą w czasie innych rozmów.

G4. Sprawiedliwy podział

Jeśli mamy trzy identyczne pizze, to możemy rozdzielić je między pięć osób tak, że każda z nich otrzyma tę samą liczbę kawałków tej samej wielkości, tj. 1/2 i 1/10 pizzy.

Jak podzielić siedem pizz między osiem osób tak, że każda otrzyma tę samą liczbę kawałków tej samej wielkości, a łączna liczba uzyskanych kawałków będzie najmniejsza z możliwych? Odpowiedź uzasadnij.

G5. Kameleony

Na pewnej wyspie żyją kameleony zdolne do zmiany ubarwienia na szare, brązowe lub purpurowe. Do zmiany koloru dochodzi tylko w jeden sposób: gdy dwa osobniki o różnym ubarwieniu spojrzą na siebie nawzajem, to skóra każdego z nich przybiera trzecią z barw. Np. po spotkaniu się szarego kameleona z brązowym kameleonem, każdy z nich stanie się purpurowy.

Rozstrzygnij, czy jest możliwe, aby wszystkie kameleony zmieniły ubarwienie na identyczne, jeśli tych o kolorze szarym jest 11, tych o kolorze brązowym – 4, a tych o kolorze purpurowym – 2015. Odpowiedź uzasadnij.

G6. Ciąg Ulama (II)

W 1964 roku Stanisław Ulam zdefiniował następujący rosnący ciąg liczb naturalnych: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 13, 16, 18, 26, 28, 36, ... Definicja ciągu ma postać rekurencyjną: każda liczba należąca do tego ciągu (poza 1 i 2) jest sumą dwóch mniejszych elementów tego ciągu (różnych).
Ta suma, stanowiąca kolejny wyraz, musi być możliwa do utworzenia tylko w jeden sposób, np. 16=13+3.

Uzasadnij, że w ciągu Ulama nie mogą wystąpić kolejno po sobie trzy kolejne liczby parzyste inne niż 4, 6 i 8.

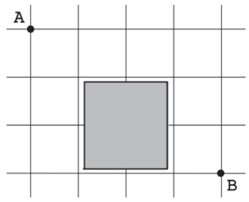
G7. Reklamy

Konkurs Koala w roku 2016 ma *n* sponsorów (*n* jest pewną określoną liczbą naturalną większą od 0). Każdy z nich przygotował dwa tej samej wielkości różne obrazki stanowiące reklamy sponsora, które będą wyświetlane na stronie internetowej konkursu, gdzie jest miejsce na dwie reklamy. Każda z tych dwóch reklam ma być wyświetlana przez 5 sekund w sposób ciągły, niekoniecznie bezpośrednio jedna po drugiej i niekoniecznie w tym samym miejscu strony. Dwie reklamy jednego sponsora nie mogą być jednak wyświetlane jednocześnie.

Zaproponuj algorytm, który pozwoli wyświetlić wszystkie reklamy w jak najkrótszym czasie. Odpowiedź uzasadnij.

G8. Teren wojskowy

Na rysunku przedstawiono fragment planu ulic pewnego miasta, który ma postać regularnej siatki. Szarym kolorem zaznaczono teren wojskowy, który jest niedostępny dla samochodów.



Ile różnych najkrótszych dróg prowadzi z punktu A do punktu B? Odpowiedź uzasadnij.

G9. Konkurs logiczny

Drużyny Leny, Marysi, Natalii i Oli rywalizowały w konkursie logicznym. Oto odpowiedzi trzech dziewcząt na pytanie o wyniki rywalizacji, jakich udzieliły osobie, która nie oglądała zawodów:
– Drużyna Natalii wygrała, a drugie miejsce zajęła drużyna Marysi. – Odpowiedziała Lena.
– Drużyna Oli była ostatnia, a drugie miejsce zajęła drużyna Leny. – Tak odpowiedziała Natalia.
– Drugie miejsce zajęła drużyna Natalii, a trzecie miejsce drużyna Oli. – Taka była odpowiedź Marysi.

Okazało się, że każda z dziewcząt tylko jedną z dwóch informacji podała zgodnie z prawdą. Czy na podstawie tych informacji można stwierdzić, kto wygrał zawody, jeśli wiadomo, że nie było miejsc *ex aequo*?

G10. Jabłka

Jaś i Joasia bardzo lubią jabłka, ale kochają też matematykę, a w szczególności teorię gier! Jaś, starszy brat Joasi, zaproponował siostrze następującą grę, której celem będzie podział dwóch dużych jabłek:
– Przetnę pierwsze jabłko na dwie części: jedna z nich będzie dla Ciebie, a druga dla mnie. Gdy zobaczysz ten podział, to zdecydujesz, czy wybierasz jedną z części jako pierwsza, czy ja mam wybrać pierwszy. Później przetnę drugie jabłko na dwie części i postąpimy tak: jeśli za pierwszym razem Ty wybierałaś pierwsza, to tym razem ja wybiorę pierwszy, a jeśli było odwrotnie, to Ty wybierzesz.

Na jaką co najwyżej część jabłka Joasia może liczyć? Odpowiedź uzasadnij.

Uwagi: 1. Oba jabłka są identyczne. 2. Jaś może podzielić jabłko tak, że jedna z części będzie zawierać tylko ogonek, czyli jabłka w niej właściwie nie będzie...
3. Celem każdego z dzieci jest zjeść jak najwięcej☺