KOALA (Kombinatoryka. Algorytmika. Logika)
Drużynowy konkurs organizowany
przez V Liceum Ogólnokształcące
im. Klaudyny Potockiej w Poznaniu

Poniżej znajduje się 10 zadań drugiego etapu konkursu II edycji (2015 r.).
Rozwiązanie każdego z zadań powinno być zapisane na **oddzielnej** kartce, opisanej nazwą drużyny.
Za przedstawienie rozwiązania (z uzasadnieniem) do każdego z nich można otrzymać od 0 do 10 punktów.
Czas pracy to **120 minut**. Po upływie tego czasu wszystkie kartki z rozwiązaniami należy umieścić w kopercie i zakleić ją.
Powodzenia!

---

1. Bridge

It's night, and four people (A, B, C and D) wish to cross an old bridge. They all begin on the same side. They have only one torch between them, and a maximum of two people can cross the bridge at one time. When two cross together they proceed at the speed of the slowest. The torch must be always carried when the bridge is crossed. Person A needs one minute to cross the bridge, person B two minutes, person C five minutes, and person D ten minutes.

Can they cross the bridge faster than in 17 minutes? Explain your answer.

1. Die Brücke

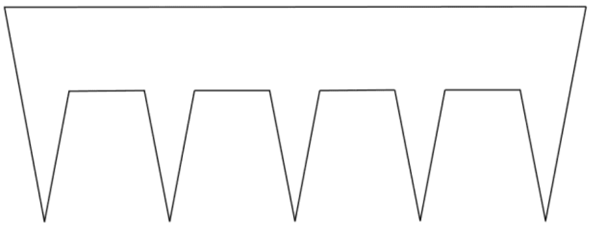
In einer Nacht stehen auf einer Seite einer alten Brücke vier Personen (A, B, C und D), die auf die andere Seite wollen. Sie haben nur eine Fackel und die Brücke kann maximal zwei Personen tragen. Wenn zwei Personen die Brücke gleichzeitig überqueren, brauchen sie so viel Zeit, wie viel die langsamere der beiden benötigt. Die Fackel muss bei einer Überquerung immer dabei sein. Um die Brücke zu überqueren, benötigt Person A eine Minute, Person B zwei Minuten, Person C fünf Minuten und Person D zehn Minuten.

Können sie die Brücke schneller als in 17 Minuten überqueren? Erkläre deine Antwort.

2. Szkolny korytarz

W pewnej szkole korytarz ma kształt 15-kąta (jak na rysunku). Dyrektor szkoły chciałby mieć pewność, że wszystkie punkty korytarza znajdują się w czasie przerw stale pod obserwacją dyżurujących nauczycieli, którzy stoją w miejscu.

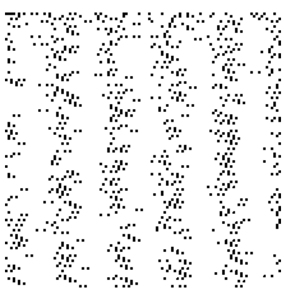
Jaka jest najmniejsza potrzebna liczba dyżurujących? Odpowiedź uzasadnij.



3. Gra w zapałki

Kasia, Ania i ich starszy brat Piotr, pojechali z rodzicami na wakacje w góry. Niestety już następnego dnia po przyjeździe zaczął padać ulewny deszcz. Dla zabicia czasu Piotr zaproponował pewną grę: – Układamy na stole pewną liczbę zapałek w trzech grupach, np. 12 zapałek można ułożyć tak, że pierwsza zawiera trzy, druga – cztery, a trzecia – pięć zapałek. Dwaj grający zabierają kolejno pewną liczbę zapałek, lecz zawsze tylko z jednej grupy. Przegrywa ten, który zabiera ostatnią. Kasia i Ania przystąpiły do gry. Początkowo zabierały ze stołu zapałki bez namysłu: wygrywała raz jedna, raz druga z sióstr. Nagle Kasia stwierdziła: – Wiesz, co zauważyłam? Zawsze, poza jednym wyjątkiem, gdy w trakcie gry pozostają dwie grupy o równej liczbie zapałek, a ty masz ruch, to wiem, jak wygrać.

Uzasadnij słuszność tezy Kasi. Jaki wyjątek miała na myśli Kasia?



4. Ciąg Ulama

W 1964 roku słynny polski uczony Stanisław Ulam, przebywający od czasów II wojny światowej w USA, zdefiniował następujący rosnący ciąg liczb naturalnych: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 13, 16, 18, 26, 28, 36, ... Definicja ciągu ma postać rekurencyjną: każda liczba należąca do tego ciągu (poza początkowymi 1 i 2) jest sumą dwóch mniejszych elementów tego ciągu (różnych). Ta suma, stanowiąca kolejny wyraz, musi być możliwa do utworzenia tylko na jeden sposób, np. 16=13+3.

Wyznacz 14. i 15. wyraz ciągu Ulama. Odpowiedź uzasadnij.

Rysunek przedstawia fragment osi liczbowej (rozdzielonej na wiersze), z zaznaczonymi liczbami tworzącymi ciąg Ulama (mniejszymi niż 108 × 108).

5. Prom kosmiczny

Znajdujesz się w promie kosmicznym lata świetlne od Ziemi. Jutro w Twoim rodzinnym mieście jest koncert Twojego ulubionego zespołu i chcesz wrócić do domu. Napęd promu ma usterkę i funkcjonuje w dziwny sposób:
– Jeśli jesteś w odległości od Ziemi, która jest wielokrotnością 3 lat świetlnych, to wywołanie instrukcji *skoku* pozwoli Ci w ciągu godziny zbliżyć się do naszej planety o dwie trzecie (⅔) odległości.
– Jeśli odległość od Ziemi nie jest wielokrotnością 3 lat świetlnych, to o efekcie wywołania instrukcji *skoku* decyduje przypadek: możesz w ciągu godziny zbliżyć się do naszej planety o 1 rok świetlny, albo o 1 rok świetlny oddalić się od niej.
– Instrukcję *skoku* trzeba wywołać raz w ciągu godziny.
Na przykład, gdyby początkowa odległość od Ziemi wynosiła 10 lat świetlnych, to jest szansa, że znajdziesz się kolejno w odległości: 9, 3, 1, 0 lat świetlnych od Ziemi, a więc wrócisz do domu w 4 godziny. Może się jednak zdarzyć, że podróż potrwa np. 6 godzin (gdy znajdziesz się kolejno w odległości 11, 12, 4, 3, 1, 0).

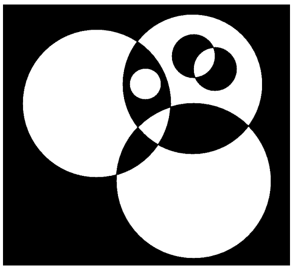
Jaki jest najkrótszy możliwy czas powrotu, jeśli jesteś w odległości 19 681 lat świetlnych od Ziemi? Odpowiedzi uzasadnij.

6. Okręgi

Ania napisała program komputerowy, który na ekranie w sposób losowy rysuje okręgi. Dziewczyna była ciekawa, czy obszary wyznaczone przez okręgi da się zawsze pomalować dwoma kolorami tak, aby sąsiednie obszary były w innych kolorach. Gdyby to była prawda, to Ania mogłaby zakodować grafikę jako monochromatyczną (jak na rysunku).

a) Uzasadnij, że takie 2-kolorowanie jest zawsze możliwe.

b) Uzupełnij brakujące fragmenty algorytmu 2-kolorowania, zapisanego poniżej.



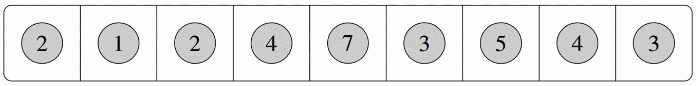
Dane: Lista wszystkich punktów (pikseli) ekranu. Lista wygenerowanych okręgów.
Wynik: Prawidłowe 2-kolorowanie punktów (pikseli) ekranu.

Algorytm:
(1) Wskaż na pierwszy punkt ekranu z listy.
(2) Wykonuj poniższe instrukcje, aż do osiągniecia końca listy punktów ekranu:
- (2.1) Ustaw *Licznik* na 0.
- (2.2) Wskaż na   okrąg z listy.
- (2.3) Wykonuj poniższe instrukcje, aż do osiągnięcia końca listy okręgów:
  - (a) Jeżeli aktualny punkt leży   aktualnego okręgu, to zwiększ *Licznik* o 1.
  - (b) Wskaż na następny okrąg na liście.
- (2.4) Jeżeli *Licznik* jest liczbą   to nadaj aktualnemu punktowi (pikselowi) ekranu kolor biały. W przeciwnym przypadku p o z o s t a w punkt (piksel) w kolorze czarnym.
- (2.5) Wskaż na   punkt ekranu na liście.

(3) Zakończ algorytm.

Uwaga: Załóż, że obszary, które mają jeden punkt wspólny nie są obszarami sąsiednimi.

7. Gra planszowa



Ania i Beata grają w grę planszową, w której używa się tylko jednego pionka. Plansza gry składa się z szeregu pól, na których zapisane są liczby. Grę rozpoczyna Ania przez postawienie pionka na jednym z pierwszych dwóch pól po lewej stronie planszy (rysunek powyżej). Dziewczyny na przemian wykonują swe ruchy. Za każdym razem pionek jest przesuwany o jedno lub dwa pola w prawo. Liczba zapisana na danym polu oznacza liczbę zdobytych w danym ruchu punktów. Gra kończy się, gdy ruch w prawo nie jest już możliwy.

Kto wygra grę? Jaką różnicą punktów? Zakładamy, że dziewczyny zawsze stosują optymalną strategię (tzn. każda z dziewczyn w każdym kroku dokonuje wyboru najlepszego z możliwych dla niej). Odpowiedź uzasadnij.

8. Eksperyment

100 uczestników zawodów II etapu konkursu Koala zaproszono do udziału w pewnym eksperymencie badawczym. Mieli wykonywać kolejno instrukcje, wypowiadane głośno przez pewnego informatyka. Najpierw polecono im, aby stanęli jeden obok drugiego, tworząc rząd, jak na lekcji WF-u. Następnie usłyszeli: – Odwróćcie się w prawo!. Po chwili okazało się, że niektórzy odwrócili się w lewo...Wówczas informatyk poprosił: – Posłuchajcie uważnie! Za chwilę zacznę wypowiadać głośno kolejne liczby, tj. 1, 2, 3, 4, 5 itd. Po usłyszeniu kolejnych liczb, osoby stojące wówczas twarzą w twarz, mają się odwrócić do siebie nawzajem plecami. Jasne? Uwaga! 1..., 2..., 3...

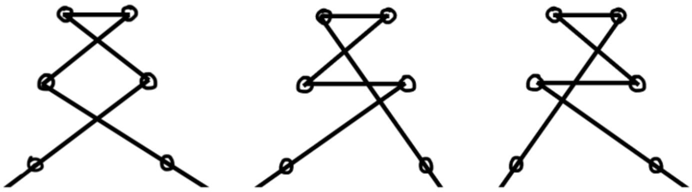
Uzasadnij, że algorytm zaproponowany przez informatyka jest skończony, tzn., że w pewnym momencie nie będzie już osób stojących oko w oko. Ile razy procedura będzie powtarzana w najgorszym przypadku? Odpowiedzi uzasadnij.

9. Ładny widok

W nowym projekcie urbanistycznym miasta zapisano, że każdy szereg nowych budynków musi mieć następującą własność estetyczną: sąsiednie budynki mają różnić się co do wysokości najbardziej jak to jest możliwe. Jaka jest największa możliwa suma różnic wysokości dla szeregu budynków o wysokościach: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11 i 12? Odpowiedź uzasadnij.

10. Sznurowadła

Producent tenisówek określił zasady poprawnego sznurowania, czyli przewlekania sznurówek przez dziurki:
– Załóż but na nogę.
– Zacznij przewlekanie od pierwszej (najbliższej łydki) dziurki buta po lewej.
– Przewlekaj sznurowadło naprzemiennie, tzn. sznurowadło przechodzi raz przez prawą, raz przez lewą dziurkę.
– Kolejna dziurka, przez którą przewlekasz sznurowadło w kierunku czubka buta, nie może być dalej od czubka niż poprzednia.
– Kolejna dziurka, przez którą przewlekasz sznurowadło w kierunku odwrotnym, nie może być bliżej czubka niż poprzednia.
– Sznurowadło musi być przewleczone przez każdą dziurkę.
– Skończ przewlekanie przez pierwszą (najbliższą łydki) dziurkę buta po prawej.



Rys. Hania Kuik

W przypadku tenisówek z trzema rzędami dziurek są trzy poprawne sposoby sznurowania (co ukazuje rysunek).

Ile jest poprawnych sposobów sznurowania w przypadku butów z czterema rzędami dziurek? Odpowiedź uzasadnij.

Zestawy zadań możecie zabrać do domu. Wasi opiekunowi otrzymali szkice rozwiązań zadań. Dziękujemy za udział w konkursie! ☺